

Received: September 30, 2023

Revised: November 19, 2023

Accepted: December 13, 2023

Published: December 26, 2023

การคำนวณความเร็วและการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของวัตถุที่เคลื่อนที่แนวตั้ง ภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลก

Calculation of Velocity and Displacement as Function of Time of Body in the Vertical Movement Under Gravitational Field

อาทิตย์ หูเต็ม¹ ศานิตย์ สุวรรณวงศ์² และ เอมอน วันเอก^{3*}
Artit Hutem¹ Sanit Suwanwong² and Aimon Wanaek^{3*}

¹ สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

² สาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

³ สาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์

¹ Program of Science Education, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat University

² Program of Physics, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat University

³ Program of Physics Faculty of Science and Technology, Uttaradit Rajabhat University

*aimon.wan@uru.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคกำลังเคลื่อนที่แนวตั้งภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลกกรณีไม่มีแรงต้านอากาศและมีแรงต้านอากาศที่เป็นฟังก์ชันของความเร็ว และคำนวณความเร็วและการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในแนวตั้งโดยใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน ผลการวิจัยพบว่าความเร็วของอนุภาคมวล m ($v(t)$) แปรผันตรงกับความเร็วของการสั่น (f) และค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง (λ) แต่แปรผกผันกับค่าแรงภายนอกเริ่มต้น (f_0) ที่เพิ่มขึ้น เมื่อกำหนดค่าความเร็วของการสั่นเพิ่มขึ้น คือ $f=0.6$ เฮิรตซ์, $f=0.7$ เฮิรตซ์ และ $f=0.8$ เฮิรตซ์ และค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงเพิ่มขึ้น คือ $\lambda=0.200$, $\lambda=0.202$ และ $\lambda=0.204$ พบว่า ความเร็วของอนุภาคเพิ่มขึ้นด้วย และเมื่อกำหนดค่าแรงภายนอกเริ่มต้นที่เพิ่มขึ้น คือ $f_0=12.1$, $f_0=12.4$ และ $f_0=12.7$ พบว่า ความเร็วของอนุภาคลดลง โดยพิจารณาจากกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $v(t)$ กับ t ส่วนการกระจัดของอนุภาคมวล m ($x(t)$) แปรผันตรงกับ f แต่แปรผกผันกับ f_0 และ λ เมื่อกำหนด f เพิ่มขึ้น คือ $f=0.11$ เฮิรตซ์, $f=0.14$ เฮิรตซ์ และ $f=0.17$ เฮิรตซ์ พบว่า กระจัดของอนุภาคเพิ่มขึ้น และเมื่อกำหนด λ เพิ่มขึ้น คือ $\lambda=0.200$, $\lambda=0.202$ และ $\lambda=0.204$ และ f_0 เพิ่มขึ้น คือ $f_0=12.0$, $f_0=13.0$ และ $f_0=14.0$ พบว่า กระจัดของอนุภาคลดลง โดยพิจารณาจากกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $x(t)$ กับ t

คำสำคัญ : การเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เคลื่อนที่แนวตั้งภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลก, แรงต้านอากาศ, ค่าความเร็วของการสั่น, ค่าแรงภายนอกเริ่มต้น, ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง

Abstract

The objective of this research is to study the movement of vertically moving particles under the Earth's gravitational field in the absence of air resistance and with air resistance as a function of speed. and calculate vertical velocity and displacement as a function of time using Newton's second law. The research results, we found that the velocity of particle ($v(t)$) was directly proportional to the vibration frequency (f) and damping coefficient (λ). On the other hand, it is inversely proportional to the increase in the initial external force (f_0). When the vibration frequency is increased, i.e. $f=0.6\text{Hz}$, $f=0.7\text{Hz}$, $f=0.8\text{Hz}$ and the damping coefficient increases, i.e. $\lambda=0.200$, $\lambda=0.202$, $\lambda=0.204$, we found that the speed of the particles also increases. When the initial external force was determined to increase, i.e. $f_0=12.1$, $f_0=12.4$, $f_0=12.7$, we found that the speed of the particles decreased. Considering the graph of the relationship between $v(t)$ and t . In the part of the displacement of the particle ($x(t)$) is proportional to f , but inversely proportional to f_0 and λ . When f was increasing ($f=0.11\text{Hz}$, $f=0.14\text{Hz}$, $f=0.17\text{Hz}$), we found that the displacement of the particle increases. And when the λ was increasing ($\lambda=0.200$, $\lambda=0.202$, $\lambda=0.204$), and the f_0 was increasing ($f_0=12.0$, $f_0=13.0$, $f_0=14.0$), we found that the displacement of particle decreases. Considering the graph of the relationship between $x(t)$ and t .

Key words: motion of particles moving vertically under the Earth's gravitational field, air resistance, frequency of vibration, Initial of external, damping coefficient

บทนำ

รายวิชาฟิสิกส์ 1 มีหัวข้อเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงซึ่งมีหัวข้อย่อยคือ วัตถุเคลื่อนที่ตกแบบเสรีในแนวตั้ง กาลิเลโอได้อธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุตกลงมาอย่างแม่นยำโดยไม่มีผลกระทบจากแรงต้านทานอากาศ โดยกาลิเลโอแรงต้านทานอากาศมีค่าน้อยมาก จึงจะเกิดการเคลื่อนที่ของวัตถุตกลงมาอย่างแม่นยำ ซึ่งในชั้นเรียนได้สอนเรื่องการเคลื่อนที่ของวัตถุเคลื่อนที่ตกแบบเสรีในแนวตั้งโดยไม่มีแรงต้านทานอากาศ เช่น $v = v_0 + gt$ และ $s = v_0t + (1/2)gt^2$ โดยที่ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ (สมาน มงคลสกุลวงศ์, 2549 และ Serway and Jewett, 2017) ซึ่งในห้องเรียนมีนักศึกษาเกิดความสงสัยว่า วัตถุที่ตกลงมาจากที่สูงกระทบเป้าหมายไม่ตรงจุดเกิดเพราะอะไร ในการแข่งขันจรวดขวดน้ำประเภทแม่นยำทำไมจึงจรวดขวดน้ำแล้วไม่ตรงเป้าหมาย

ดังนั้นจึงเป็นแรงจูงใจให้งานวิจัยครั้งนี้ได้พิจารณาวัตถุมวล m ที่เคลื่อนที่ในแนวตั้งภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลกกรณีไม่มีแรงต้านอากาศและมีแรงต้านอากาศที่เป็นฟังก์ชันของความเร็ว เช่นเดียวกับงานวิจัยของ จิราภรณ์ ปุณยวัจน์พรกุล และวิไลพร ลักษณะมีวณิชย์ (2564), Cooper (2018), และ Ferreira et.al. (2017) โดยมีการรบกวนจากแรงภายนอกที่มีการ oscillation และเกิดความหน่วงของอนุภาคมวล m ที่สอดคล้องกับงานวิจัยของ จิราวรรณ ทรัพย์ทิพย์, ปิยรัตน์ มูลศรี และอาทิตย์ หุ้เต็ม (2021) แรงภายนอกนี้

เป็นฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์แบบจำลองลักษณะการแปรผันของโมเลกุลอากาศตอนเกิดลมขนาดกำลังแรงปานกลาง ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้มีการคำนวณเกี่ยวกับความเร็วปลายของระบบ และการกระจัดของระบบที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ในทำนองเดียวกับงานวิจัยของ ปิยรัตน์ มุลศรี, ศศิกานต์ ปานปรางิณีเจริญ, และอาทิตย์ หุ้เต็ม (2022) การศึกษาการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งของวัตถุในสนามแรงโน้มถ่วงของโลก เครื่องมือวิเคราะห์เปรียบเทียบการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวดิ่งเมื่อมีอากาศไม่คำนึงถึงแรงต้านทานกับการเคลื่อนที่ของวัตถุขึ้นเดียวกันกับเมื่อมีแรงต้านของอากาศ ซึ่งพิสูจน์ได้ว่ามีประโยชน์มากในการเรียนการสอน ดังนั้นหลาย ๆ กรณีสามารถวิเคราะห์ได้อย่างรวดเร็วโดยการปรับเปลี่ยนข้อมูลอินพุต (Grigore and Barna, 2015) และนำเสนอข้อมูลโดยผ่านเครื่องมือ Mathematica (Hutem and Kerdmee, 2013)

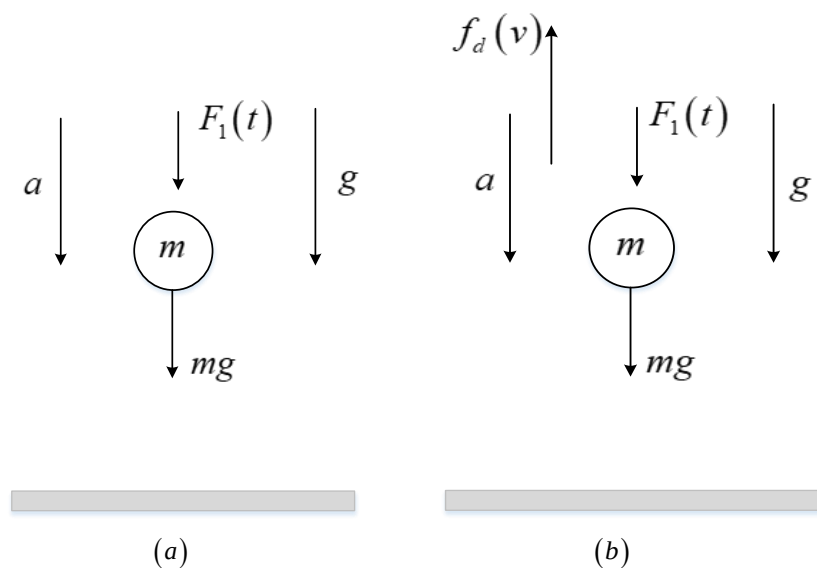
เครื่องมือ Mathematica เป็นเครื่องมือคอมพิวเตอร์ทางเทคนิคสมัยใหม่ที่ใช้สำหรับการคำนวณต่าง ๆ เช่นเดียวกับกระบวนการจำลองที่ความเร็วเริ่มต้นต่าง ๆ โดยการรักษารามิเตอร์อื่น ๆ ให้คงที่ (Paudel, 2019) สามารถนำมาใช้ในการวิเคราะห์ค่าความเร็วและการกระจัดของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา รวมทั้งยังสามารถนำเสนอผลการวิเคราะห์ค่าดังกล่าวในรูปแบบของกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับเวลา และการกระจัดกับเวลาอีกด้วย

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคกำลังเคลื่อนที่แนวดิ่งภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลกกรณีไม่มีแรงต้านอากาศและมีแรงต้านอากาศที่เป็นฟังก์ชันของความเร็ว และคำนวณความเร็วและการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในแนวดิ่งโดยใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน

วิธีดำเนินการวิจัย

1. การคำนวณหาความเร็วและการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของวัตถุที่เคลื่อนที่แนวดิ่งภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลกกรณีไม่มีแรงต้านอากาศ ($f_d(v)$) และมีแรงต้านอากาศ ($f_d(v)$) ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 (a) แสดงลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $F_1(t)$ ไม่ได้คิดแรงต้านอากาศ ($f_d(v)$) (b) แสดงลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $F_1(t)$ โดยคิดแรงต้านอากาศที่เป็นฟังก์ชันของความเร็ว ($f_d(v)$)

การเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลก เริ่มต้นพิจารณาจากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน (The Newton's second law of motions) (รัชนี รุจิวิโรตม, 2558 และ Serway and Jewett, 2017)

$$\begin{aligned}\sum F &= ma \\ F_1(t) + mg &= ma \\ a &= \frac{F_1(t)}{m} + g\end{aligned}\quad (1)$$

โดยที่เรากำหนดให้ $F_1(t)$ เป็นแรงภายนอกที่มีการ oscillation และเกิดความหน่วงของอนุภาคมวล m ดังนี้

$$F_1(t) = f_0(1 - te^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \cos(\omega t)) \quad (2)$$

จากสมการที่ (2) ตัวแปร f_0 เป็นแรงภายนอกเริ่มต้นมีหน่วย N/s , และตัวแปร λ เป็นสัมประสิทธิ์ความหน่วง และตัวแปร $\omega = 2\pi f$ โดยที่ f เป็นความถี่ของการสั่นแรงภายนอกมีหน่วย รอบต่อวินาที นำสมการที่ (2) แทนลงในสมการที่ (1) จะได้ ความเร่งของอนุภาคมวล m ดังนี้

$$a(t) = \frac{f_0}{m}(1 - te^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \cos(\omega t)) + g \quad (3)$$

คำนวณหาความเร็วของวัตถุที่เป็นฟังก์ชันของเวลาจากนิยามของความเร่ง $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ แทนลงในสมการที่

(3) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{f_0}{m} (1 - te^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \cos(\omega t)) + g \\ \int_u^v dv &= \frac{f_0}{m} \int_0^t (1 - te^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \cos(\omega t)) dt + g \int_0^t 1 dt \\ v|_u^v &= \frac{f_0}{m} \left\{ \int_0^t dt - \int_0^t te^{-\lambda t} dt - \int_0^t e^{-\lambda t} \cos(\omega t) dt \right\} + gt \Big|_0^t \\ v - u &= \frac{f_0}{m} \left\{ t - \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \left(t + \frac{1}{\lambda} \right) \right]_0^t - \left[\frac{e^{-\lambda t} (-\lambda \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t))}{\lambda^2 + \omega^2} \right]_0^t \right\} + gt\end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ความเร็วที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของวัตถุที่เคลื่อนที่ตามแนวดิ่งภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลก
กรณีไม่คิดแรงต้านอากาศดังสมการที่ (4)

$$v(t) = u + \frac{f_0}{m} \left[t + \left(\frac{te^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) - \left(\frac{e^{-\lambda t} (-\lambda \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t))}{\lambda^2 + \omega^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} \right) \right] + gt \quad (4)$$

จากนั้นดำเนินการคำนวณหาการกระจัดของวัตถุที่เป็นฟังก์ชันของเวลาจากนิยามของความเร็ว

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \text{ แทนลงในสมการที่ (4) จะได้}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= u + \frac{f_0}{m} \left[t + \left(\frac{te^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) - \left(\frac{e^{-\lambda t} (-\lambda \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t))}{\lambda^2 + \omega^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} \right) \right] + gt \\ \int_0^x dx(t) &= \int_0^t u dt + \frac{f_0}{m} \int_0^t \left[t + \frac{te^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\omega e^{-\lambda t} \sin(\omega t)}{\lambda^2 + \omega^2} + \frac{\lambda e^{-\lambda t} \cos(\omega t)}{\lambda^2 + \omega^2} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} \right] dt + \int_0^t gt dt \\ x(t)|_0^x &= ut \Big|_0^t + \frac{f_0}{m} \left[\frac{t^2}{2} \Big|_0^t + \left(\frac{te^{-\lambda t}}{\lambda^2} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^3} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^3} \right) \Big|_0^t - \frac{t}{\lambda^2} - \frac{\omega}{\lambda^2 + \omega^2} \int_0^t e^{-\lambda t} \sin(\omega t) dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} \int_0^t e^{-\lambda t} \cos(\omega t) dt + \frac{\lambda t}{\lambda^2 + \omega^2} \right] + \frac{gt^2}{2} \\ x(t) &= ut + \frac{f_0}{m} \left[\frac{t^2}{2} + \frac{te^{-\lambda t}}{\lambda^2} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda^3} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda^3} - \frac{t}{\lambda^2} - \frac{\omega e^{-\lambda t} (-\lambda \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t))}{(\lambda^2 + \omega^2)^2} \Big|_0^t \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\omega \sin(\omega t) - \lambda \cos(\omega t))}{(\lambda^2 + \omega^2)^2} \Big|_0^t + \frac{\lambda t}{\lambda^2 + \omega^2} \right] + \frac{gt^2}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้การกระจัดที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของวัตถุที่เคลื่อนที่ตามแนวดิ่งภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลก
กรณีไม่คิดแรงต้านอากาศดังสมการที่ (5)

$$x(t) = ut + \frac{f_0}{m} \left[\frac{t^2}{2} + \frac{te^{-\lambda t}}{\lambda^2} - \frac{t}{\lambda^2} - \frac{\omega e^{-\lambda t} (-\lambda \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t))}{(\lambda^2 + \omega^2)^2} - \frac{\omega^2}{(\lambda^2 + \omega^2)^2} \right]$$

$$+ \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\omega \sin(\omega t) - \lambda \cos(\omega t))}{(\lambda^2 + \omega^2)^2} + \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \omega^2)^2} + \frac{\lambda t}{\lambda^2 + \omega^2} \left] + \frac{gt^2}{2} \quad (5)$$

2. การคำนวณหาความเร็วและการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของวัตถุที่เคลื่อนที่แนวตั้งภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลกกรณีที่มีแรงต้านอากาศ (f_d) โดยที่การเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลก เริ่มต้นพิจารณาจากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน (The second Newton's law of motions) (รัชนี รุจิวิโรตม, 2558 และ Serway and Jewett, 2017)

$$\begin{aligned} \sum F &= ma \\ F_1(t) + mg - f_d &= ma \\ a &= \frac{F_1(t)}{m} + g - \frac{f_d(v)}{m} \end{aligned} \quad (6)$$

โดยที่เรากำหนดให้ $F_1(t)$ ขึ้นอยู่กับแรงภายนอกที่มีการ oscillation และเกิดความหน่วงของอนุภาคมวล m ดังนี้

$$F_1(t) = f_0(1 - te^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \cos(\omega t)) \quad (7)$$

และแรงต้านอากาศเป็นฟังก์ชันของความเร็ว สามารถเขียนได้เป็น

$$f_d(v) = \tau v \quad (8)$$

โดยมี τ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านอากาศ

แทนค่าจากสมการที่ (7) และ (8) ลงใน (6) จะได้

$$a(t) = \frac{f_0}{m}(1 - te^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \cos(\omega t)) + g - \frac{\tau v}{m} \quad (9)$$

คำนวณหาความเร็วของวัตถุที่เป็นฟังก์ชันของเวลาจากนิยามของความเร่ง $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ แทนลงในสมการที่

(9) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dv_{ar}}{dt} &= \frac{f_0}{m}(1 - te^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \cos(\omega t)) + g - \frac{\tau}{m} v_{ar} \\ \frac{dv_{ar}}{dt} + \frac{\tau}{m} v_{ar} &= \frac{f_0}{m}(1 - te^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \cos(\omega t)) + g \end{aligned}$$

เพื่อความสะดวกต่อการพิจารณาจะกำหนดให้ $\mu = \left(\frac{\tau}{m} - \lambda\right)$

$$\begin{aligned} v_{ar}(t) &= e^{-\frac{\tau}{m}t} \left[\int \left[\frac{f_0}{m}(1 - te^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \cos(\omega t)) + g \right] e^{\frac{\tau}{m}t} dt + C \right] \\ v_{ar}(t) &= e^{-\frac{\tau}{m}t} \left[\int \left[\frac{f_0}{m} \left(e^{\frac{\tau}{m}t} - te^{\frac{\tau}{m}t - \lambda t} - e^{\frac{\tau}{m}t - \lambda t} \cos(\omega t) \right) + ge^{\frac{\tau}{m}t} \right] dt + C \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{ar}(t) &= e^{-\frac{\tau}{m}t} \left[\frac{f_0}{m} \left(\int e^{\frac{\tau}{m}t} dt - \int t e^{\mu t} dt - \int e^{\mu t} \cos(\omega t) dt \right) \int g e^{\frac{\tau}{m}t} dt + C \right] \\
 v_{ar}(t) &= e^{-\frac{\tau}{m}t} \left[\frac{f_0}{m} \left(\frac{m}{\tau} e^{\frac{\tau}{m}t} - \left\{ \frac{e^{\mu t}}{\mu} \left(t - \frac{1}{\mu} \right) \right\} - \frac{e^{\mu t} (\mu \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t))}{\mu^2 + \omega^2} \right) + g \frac{m}{\tau} e^{\frac{\tau}{m}t} + C \right] \\
 v_{ar}(t) &= \frac{f_0}{m} \left(\frac{m}{\tau} e^{\frac{\tau}{m}t} e^{-\frac{\tau}{m}t} - \left\{ \frac{e^{-\frac{\tau}{m}t} e^{\mu t}}{\mu} \left(t - \frac{1}{\mu} \right) \right\} - \frac{e^{-\frac{\tau}{m}t} e^{\mu t} (\mu \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t))}{\mu^2 + \omega^2} \right) + g \frac{m}{\tau} e^{\frac{\tau}{m}t} e^{-\frac{\tau}{m}t} + C e^{-\frac{\tau}{m}t} \\
 v_{ar}(t) &= \frac{f_0}{m} \left(\frac{m}{\tau} - \left\{ \frac{e^{\mu t - \frac{\tau}{m}t}}{\mu} \left(t - \frac{1}{\mu} \right) \right\} - \frac{e^{\mu t - \frac{\tau}{m}t} (\mu \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t))}{\mu^2 + \omega^2} \right) + g \frac{m}{\tau} + C e^{-\frac{\tau}{m}t} \\
 v_{ar}(t) &= \frac{f_0}{m} \left(\frac{m}{\tau} - \left\{ \frac{e^{-\lambda t}}{\frac{\tau}{m} - \lambda} \left(t - \frac{1}{\frac{\tau}{m} - \lambda} \right) \right\} - \frac{e^{-\lambda t} \left(\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right) \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) \right)}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2 + \omega^2} \right) + g \frac{m}{\tau} + C e^{-\frac{\tau}{m}t}
 \end{aligned}$$

(10)

กำหนดให้ความเร็วเริ่มต้นที่เวลา $t = 0$

$$v(t) = u$$

เพราะฉะนั้นที่เวลาเริ่มต้น $t = 0$ สมการที่ (10) จะได้เป็น

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{f_0}{m} \left(\frac{m}{\tau} + \frac{1}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2} - \frac{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2 + \omega^2} \right) + g \frac{m}{\tau} + C \\
 C &= u - g \frac{m}{\tau} - \frac{f_0}{m} \left(\frac{m}{\tau} + \frac{1}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2} - \frac{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2 + \omega^2} \right)
 \end{aligned}$$

(11)

แทนค่า C จากสมการที่ (11) ลงใน (1) จะได้ความเร็วที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของวัตถุที่เคลื่อนที่ตามแนวดิ่งภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลกกรณีคิดแรงต้านอากาศดังสมการที่ (12)

$$v_{ar}(t) = \frac{f_0}{m} \left(\frac{m}{\tau} - \left\{ \frac{e^{-\lambda t}}{\frac{\tau}{m} - \lambda} \left(t - \frac{1}{\frac{\tau}{m} - \lambda} \right) \right\} - \frac{e^{-\lambda t} \left(\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right) \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) \right)}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2 + \omega^2} \right) + g \frac{m}{\tau}$$

$$+ \left(u - g \frac{m}{\tau} - \frac{f_0}{m} \left[\frac{m}{\tau} + \frac{1}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2} - \frac{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2 + \omega^2} \right] \right) e^{-\frac{\tau}{m}t} \quad (12)$$

จากนั้นดำเนินการคำนวณหาการกระจัดของวัตถุที่เป็นฟังก์ชันของเวลาจากนิยามของความเร็ว

$v_{ar}(t) = dx_{ar}(t)/dt$ แทนลงในสมการที่ (12) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dx_{ar}(t)}{dt} &= \frac{f_0}{m} \left[\frac{m}{\tau} - \left\{ \frac{e^{-\lambda t}}{\frac{\tau}{m} - \lambda} \left(t - \frac{1}{\frac{\tau}{m} - \lambda} \right) \right\} - \frac{e^{-\lambda t} \left(\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right) \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) \right)}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2 + \omega^2} \right] + g \frac{m}{\tau} \\ &+ \left(u - g \frac{m}{\tau} - \frac{f_0}{m} \left[\frac{m}{\tau} + \frac{1}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2} - \frac{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2 + \omega^2} \right] \right) e^{-\frac{\tau}{m}t} \\ \int_0^x dx_{ar}(t) &= \frac{f_0}{m} \left[\frac{m}{\tau} \int_0^t dt - \int_0^t \frac{te^{-\lambda t}}{\frac{\tau}{m} - \lambda} dt - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda \left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2} \Big|_0^t - \frac{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2 + \omega^2} \int_0^t e^{-\lambda t} \cos(\omega t) dt \right. \\ &\left. - \frac{\omega}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2 + \omega^2} \int_0^t e^{-\lambda t} \sin(\omega t) dt \right] + g \frac{m}{\tau} t \Big|_0^t - \frac{m}{\tau} \left(u - g \frac{m}{\tau} - \frac{f_0}{m} \left[\frac{m}{\tau} + \frac{1}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2} - \frac{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2 + \omega^2} \right] \right) e^{-\frac{\tau}{m}t} \Big|_0^t \end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned} x_{ar}(t) &= \frac{f_0}{m} \left[\frac{m}{\tau} t - \frac{1}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)} \left\{ \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \left(t + \frac{1}{\lambda} \right) \right\} - \frac{e^{-\lambda t} - \lambda}{\lambda \left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2} - \frac{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2 + \omega^2} \cdot \frac{e^{-\lambda t} (-\lambda \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t))}{\lambda^2 + \omega^2} \Big|_0^t \right. \\ &\left. - \frac{\omega}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2 + \omega^2} \cdot \frac{e^{-\lambda t} (-\lambda \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t))}{\lambda^2 + \omega^2} \Big|_0^t \right] + g \frac{m}{\tau} t \Big|_0^t \\ &- \left[\frac{m}{\tau} \left(u - g \frac{m}{\tau} - \frac{f_0}{m} \left[\frac{m}{\tau} + \frac{1}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2} - \frac{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda \right)^2 + \omega^2} \right] \right) \right] \cdot \left(e^{-\frac{\tau}{m}t} - 1 \right) \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้การกระจัดที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของวัตถุที่เคลื่อนที่ตามแนวตั้งภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลก
กรณีคิดแรงต้านอากาศดังสมการที่ (13)

$$x_{ar}(t) = \frac{f_0}{m} \left[\frac{m}{\tau} t - \frac{1}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda\right)} \left\{ \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \left(t + \frac{1}{\lambda} \right) \right\} - \frac{e^{-\lambda t} - \lambda}{\lambda \left(\frac{\tau}{m} - \lambda\right)^2} - \frac{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda\right) e^{-\lambda t} (-\lambda \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t))}{\left(\left(\frac{\tau}{m} - \lambda\right)^2 + \omega^2\right)(\lambda^2 + \omega^2)} \right. \\ \left. - \frac{\lambda \left(\frac{\tau}{m} - \lambda\right)}{\left(\left(\frac{\tau}{m} - \lambda\right)^2 + \omega^2\right)(\lambda^2 + \omega^2)} - \frac{\omega e^{-\lambda t} (-\lambda \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t))}{\left(\left(\frac{\tau}{m} - \lambda\right)^2 + \omega^2\right)(\lambda^2 + \omega^2)} - \frac{\omega^2}{\left(\left(\frac{\tau}{m} - \lambda\right)^2 + \omega^2\right)(\lambda^2 + \omega^2)} \right] + \frac{mg}{\tau} t \\ - \left[\frac{m}{\tau} \left(u - g \frac{m}{\tau} - \frac{f_0}{m} \left(\frac{m}{\tau} + \frac{1}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda\right)^2} - \frac{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda\right)}{\left(\frac{\tau}{m} - \lambda\right)^2 + \omega^2} \right) \right) \right] \cdot \left(e^{-\frac{\tau}{m} t} - 1 \right) \quad (13)$$

3. การศึกษาผลของการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เคลื่อนที่ตามแนวตั้งภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลก
กรณีไม่คิดแรงต้านอากาศและกรณีคิดแรงต้านอากาศ เพื่อพิจารณาขนาดของความเร็วและการกระจัดของ
อนุภาคมวล m โดยกำหนดขนาดของตัวแปรต้น ได้แก่ ขนาดของแรงเริ่มต้น (f_0) , ค่าความถี่ของการสั่น
(f) , และ ค่าของสัมประสิทธิ์ความหน่วง (λ) โดยมีรายละเอียดดังนี้

ตารางที่ 1 ค่าความเร็วของวัตถุที่เคลื่อนที่ตามแนวตั้งภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลก และแรงภายนอก
 $F_1(t)$ ในกรณีที่คิดแรงต้านอากาศ และกรณีคิดแรงต้านอากาศ

ตัวแปรต้น	ตัวแปรตาม	ตัวแปรควบคุม
แรงภายนอกเริ่มต้น $f_0 = 12.1, f_0 = 12.4, f_0 = 12.7$	ความเร็วของวัตถุที่ไม่ขึ้นกับแรงต้านอากาศ	$\lambda = 0.25, f = 0.8$ เฮิรตซ์ $g = 9.8$ เมตร/วินาที ² $m = 0.25$ กิโลกรัม, $u = 0.05$ เมตรต่อวินาที
	ความเร็วของวัตถุที่ขึ้นกับแรงต้านอากาศ	$\lambda = 0.25, f = 0.8$ เฮิรตซ์ $g = 9.8$ เมตร/วินาที ² $m = 0.25$ กิโลกรัม, $\tau = 0.02$ $u = 0.05$ เมตรต่อวินาที
ความถี่ของการสั่น $f = 0.6$ เฮิรตซ์,	ความเร็วของวัตถุที่ไม่ขึ้นกับแรงต้านอากาศ	$\lambda = 0.24, f_0 = 9$ นิวตันต่อวินาที $g = 9.8$ เมตร/วินาที ² $m = 0.25$ กิโลกรัม,

$f = 0.7$ เฮิร์ตซ์, $f = 0.8$ เฮิร์ตซ์		$u = 0.05$ เมตรต่อวินาที
	ความเร็วของวัตถุที่ขึ้นกับแรงต้านอากาศ	$\lambda = 0.24$, $f_0 = 9$ นิวตันต่อวินาที $g = 9.8$ เมตร/วินาที ² $m = 0.25$ กิโลกรัม, $\tau = 0.02$ $u = 0.05$ เมตรต่อวินาที
ค่าของสัมประสิทธิ์ ความหน่วง $\lambda = 0.200$, $\lambda = 0.202$, $\lambda = 0.204$	ความเร็วของวัตถุที่ไม่ขึ้นกับแรงต้านอากาศ	$f = 0.20$ เฮิร์ตซ์, $f_0 = 5$ นิวตันต่อวินาที $g = 9.8$ เมตร/วินาที ² $m = 0.25$ กิโลกรัม, $u = 0.05$ เมตรต่อวินาที
	ความเร็วของวัตถุที่ขึ้นกับแรงต้านอากาศ	$f = 0.20$ เฮิร์ตซ์, $f_0 = 5$ นิวตันต่อวินาที $g = 9.8$ เมตร/วินาที ² $m = 0.25$ กิโลกรัม, $\tau = 0.02$ $u = 0.05$ เมตรต่อวินาที,

ตารางที่ 2 ขนาดการกระจัดของวัตถุที่เคลื่อนที่ตามแนวตั้งภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลก และแรงภายนอก $F_1(t)$ ในกรณีที่ไม่คิดแรงต้านอากาศ และในกรณีคิดแรงต้านอากาศ

ตัวแปรต้น	ตัวแปรตาม	ตัวแปรควบคุม
แรงภายนอกเริ่มต้น $f_0 = 12.0$, $f_0 = 13.0$, $f_0 = 14.0$	การกระจัดของวัตถุที่ไม่ขึ้นกับแรงต้านอากาศ	$\lambda = 0.25$, $f = 0.8$ เฮิร์ตซ์ $g = 9.8$ เมตร/วินาที ² $m = 0.25$ กิโลกรัม, $u = 0.05$ เมตรต่อวินาที
	การกระจัดของวัตถุที่ขึ้นกับแรงต้านอากาศ	$\lambda = 0.25$, $f = 0.8$ เฮิร์ตซ์ $g = 9.8$ เมตร/วินาที ² $m = 0.25$ กิโลกรัม, $\tau = 0.02$ $u = 0.05$ เมตรต่อวินาที,
ความถี่ของการสั่น $f = 0.11$ เฮิร์ตซ์, $f = 0.14$ เฮิร์ตซ์, $f = 0.17$ เฮิร์ตซ์	การกระจัดของวัตถุที่ไม่ขึ้นกับแรงต้านอากาศ	$\lambda = 0.24$, $f_0 = 9$ นิวตันต่อวินาที $g = 9.8$ เมตร/วินาที ² $m = 0.25$ กิโลกรัม, $u = 0.05$ เมตรต่อวินาที
	การกระจัดของวัตถุที่ขึ้นกับแรงต้านอากาศ	$\lambda = 0.24$, $f_0 = 9$ นิวตันต่อวินาที $g = 9.8$ เมตร/วินาที ² $m = 0.25$ กิโลกรัม, $\tau = 0.009$ $u = 0.05$ เมตรต่อวินาที
	การกระจัดของวัตถุที่ไม่ขึ้นกับแรงต้านอากาศ	$f = 0.20$ เฮิร์ตซ์, $f_0 = 5$ นิวตันต่อวินาที $g = 9.8$ เมตร/วินาที ²

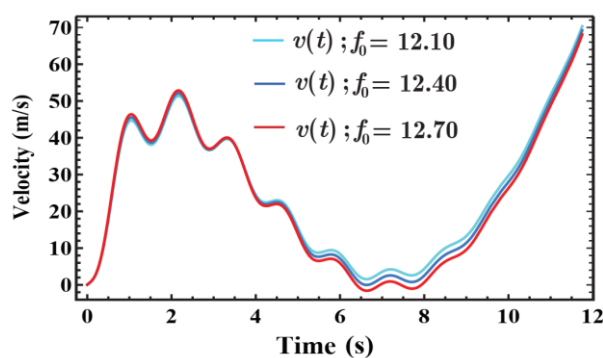
ค่าของสัมประสิทธิ์ ความหน่วง $\lambda=0.200$, $\lambda=0.202$, $\lambda=0.204$		$m = 0.25$ กิโลกรัม, $u = 0.05$ เมตรต่อวินาที
	การกระจัดของวัตถุที่ขึ้นกับแรงต้านอากาศ	$f = 0.20$ เฮิรตซ์, $f_0 = 5$ นิวตัน ต่อวินาที $g = 9.8$ เมตร/วินาที ² $m = 0.25$ กิโลกรัม, $\tau = 0.008$ $u = 0.05$ เมตรต่อวินาที,

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

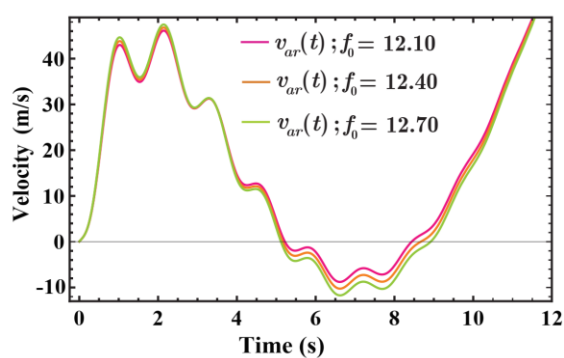
งานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้คำนวณความเร็วและการกระจัดของอนุภาคมวล m ที่เคลื่อนที่ภายใต้สนามโน้มถ่วงและแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $F_1(t)$ ในสมการที่ (4) และสมการที่ (5) ตามลำดับซึ่งงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้นำสมการทั้งสองดังกล่าวไปวิเคราะห์ข้อมูลต่าง ๆ ดังรูปที่ (2) (a) - รูปที่ (7) (a) ตามลำดับและในอีกกรณีหนึ่งคำนวณความเร็วและการกระจัดของอนุภาคมวล m ที่เคลื่อนที่ภายใต้สนามโน้มถ่วงและแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $F_1(t)$ และภายใต้แรงต้านอากาศที่เป็นฟังก์ชันของความเร็ว ในสมการที่ (12) และสมการที่ (13) ตามลำดับซึ่งงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้นำสมการทั้งสองดังกล่าวไปวิเคราะห์ข้อมูลต่าง ๆ และนำเสนอกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคมวล m กับเวลา และการกระจัดของอนุภาคมวล m กับเวลา ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (Zimmerman et. al., 2002 และ Wolfram, 1994) ดังรูปที่ (2) (b) - รูปที่ (7) (b) รวมถึงการเปรียบเทียบขนาดของความเร็วและการกระจัดของวัตถุมวล m กรณีที่ไม่คิดแรงต้านอากาศ และในกรณีคิดแรงต้านอากาศด้วย

ความเร็ว

- (1) กรณีกำหนดตัวแปรต้นคือ ค่าแรงเริ่มต้น (f_0)



(a)

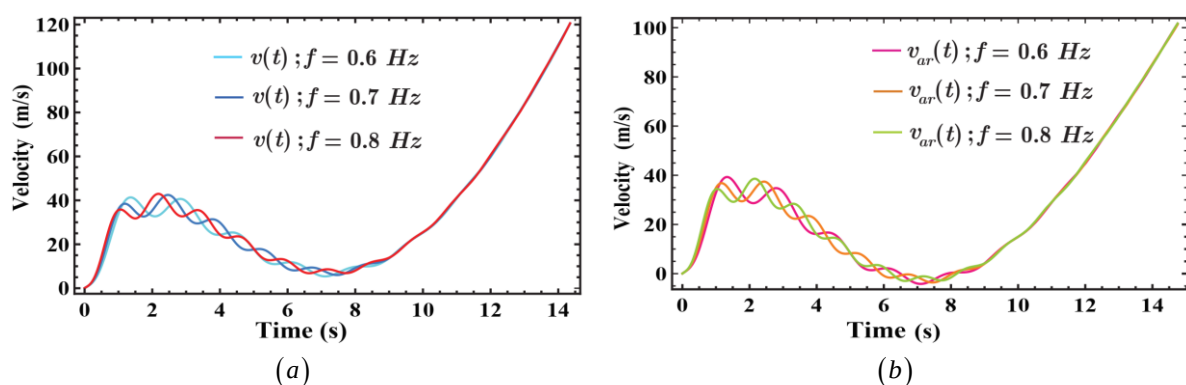


(b)

รูปที่ 2 (a) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับเวลาของวัตถุมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกและมีการเปลี่ยนแปลงค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 , (b) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับเวลาของวัตถุมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงต้านอากาศ f_d และแรงภายนอก และมีการเปลี่ยนแปลงค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0

จากรูปที่ 2 (a) เป็นกราฟที่มีการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรของความเร็วกับเวลา เมื่ออนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา โดยไม่ได้คิดแรงต้านอากาศ ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้มีการเปลี่ยนแปลงค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 ดังนี้ $f_0=12.1$, $f_0=12.4$, $f_0=12.7$ ซึ่งในกราฟดังกล่าวในช่วงเวลา 0 ถึง 3 วินาทีความเร็วของอนุภาคมวล m มีค่าเพิ่มขึ้นตามค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 ค่าของความเร็ว ณ เวลา 12 วินาที มีค่า 70 เมตรต่อวินาที (m/s) แสดงว่าความเร็วของอนุภาคมวล m แปรผันตรงกับค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 แต่ในช่วงของเวลาตั้งแต่ 4 ถึง 10 วินาที ความเร็วของอนุภาคมวล m แปรผกผันกับค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 ในทำนองเดียวกันของความเร็วของอนุภาคมวล m ในรูปที่ 2 (b) มีลักษณะการเคลื่อนที่เหมือนกันแต่แตกต่างกันตรงที่ขนาดของความเร็วในช่วงเวลาเริ่มต้นมีค่าลดลงจากเหลือประมาณ 50 เมตรต่อวินาที โดยประมาณ จากรูปที่ 2 ทั้งรูป (a) และ (b) ในการอนุภาคมวล m ตกในช่วงเวลา 10 วินาทีแรกโดยประมาณอนุภาคมีการสั่นของความเร็วและมีการกลับเฟสของการสั่นซึ่งค่าความเร็วของอนุภาคมวล m มีค่าสลับกันเพิ่มลดเนื่องจากผลของแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $F_1(t)$ หลังจาก 12 วินาทีไปแล้วอนุภาคมวล m จะมีค่าของความเร็วเพิ่มขึ้นเป็นลักษณะเส้นชันขึ้น

(2) กรณีกำหนดตัวแปรต้นคือ ค่าความถี่ของการสั่น (f)

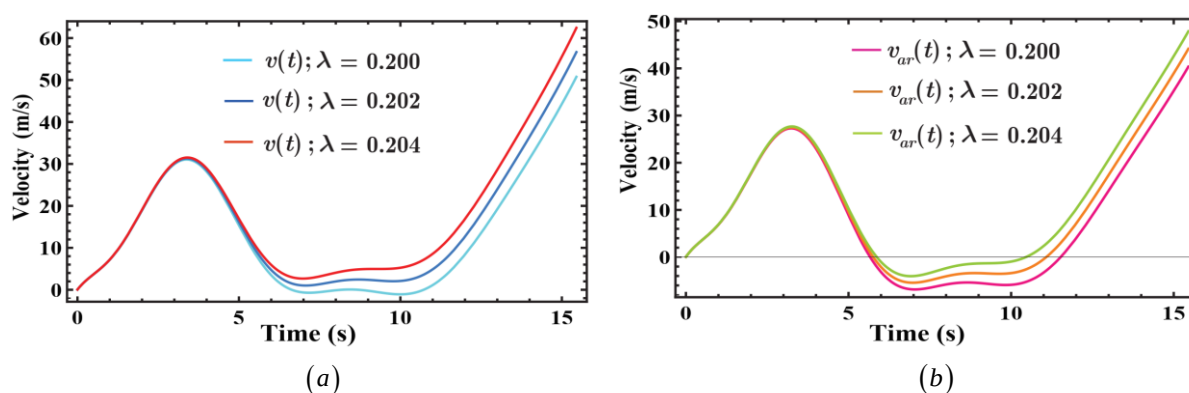


รูปที่ 3 (a) แสดงกราฟที่มีความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับเวลาของวัตถุมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอก $F_1(t)$ และมีการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่ของการสั่น f , (b) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับเวลาของวัตถุมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงต้านอากาศ f_d และแรงภายนอก $F_1(t)$ และมีการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่ของการสั่น f

จากรูปที่ 3 (a) เป็นกราฟที่มีการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรของความเร็วกับเวลา เมื่ออนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา โดยไม่ได้คิดแรงต้านอากาศ ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้มีการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่ของการสั่น f ดังนี้ $f=0.6$ เฮิรตซ์, $f=0.7$ เฮิรตซ์, $f=0.8$ เฮิรตซ์ ซึ่งในกราฟดังกล่าวในช่วงเวลา 0 วินาที ถึง 8 วินาทีความเร็วของอนุภาคมวล m เกิดการสั่นเมื่อค่าความถี่ของการสั่นเพิ่มขึ้นทำให้จำนวนลูกคลื่นของความเร็วของอนุภาคมวล m มีมากขึ้นแต่ค่าของความเร็วกลับมีค่าลดลงจาก 40 เมตรต่อวินาทีไปสู่ 35 เมตรต่อวินาที โดยประมาณ ณ เวลาที่ 14 วินาที

ความเร็วของอนุภาคมวล m มีค่า 120 เมตรต่อวินาที จากรูปที่ 3 (b) เป็นกราฟที่มีการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรของความเร็วกับเวลาเมื่ออนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา โดยได้คิดแรงต้านอากาศซึ่งในงานวิจัยนี้ได้มีการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่ของการสั่น f ดังนี้ $f=0.6$ เฮิรตซ์, $f=0.7$ เฮิรตซ์, $f=0.8$ เฮิรตซ์ซึ่งในกราฟดังกล่าวในช่วงเวลา 0 วินาที ถึง 8 วินาทีความเร็วของอนุภาคมวล m เกิดการสั่น เมื่อค่าความถี่ของการสั่นเพิ่มขึ้นทำให้จำนวนลูกคลื่นของความเร็วของอนุภาคมวล m มีมากขึ้น ณ เวลาที่ 14 วินาที ความเร็วของอนุภาคมวล m มีค่า 100 เมตรต่อวินาที ซึ่งความเร็วดังกล่าวมีค่าลดลงเมื่อเทียบกับ ความเร็วของอนุภาครูปที่ 3 (a)

(3) กรณีกำหนดตัวแปรต้นคือ ค่าของสัมประสิทธิ์ความหน่วง (λ)

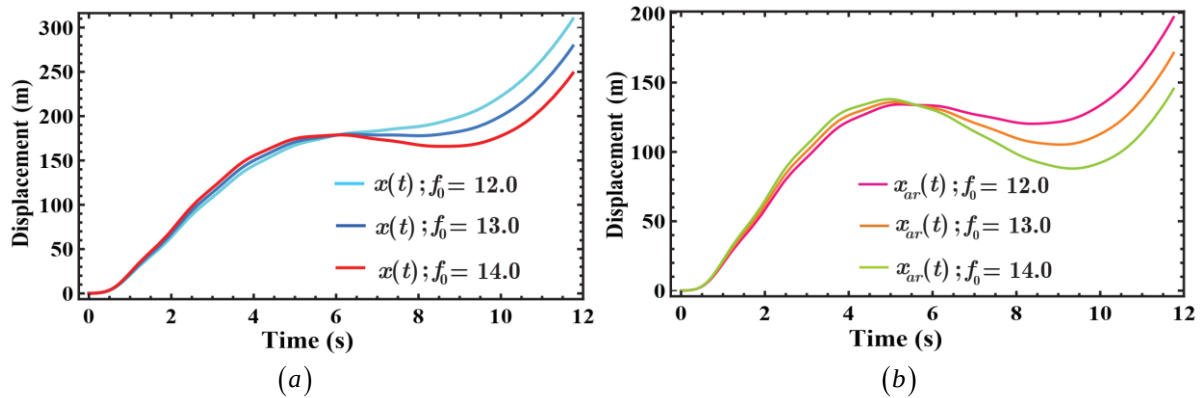


รูปที่ 4 (a) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรความเร็วกับเวลาของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $F_1(t)$ และมีการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง λ , (b) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรความเร็วกับเวลาของวัตถุมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงต้านอากาศ f_d และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และมีการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง λ

จากรูปที่ 4 (a) เป็นกราฟที่มีการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรความเร็วกับเวลาของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา โดยไม่ได้คิดแรงต้านอากาศซึ่งในงานวิจัยนี้ได้มีการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง λ ดังนี้ $\lambda=0.200$, $\lambda=0.202$, $\lambda=0.204$ เมื่อเรากำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงมีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าของความเร็วของอนุภาคมวล m มีค่าเพิ่มขึ้นแปรผันโดยตรงกับค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง ณ เวลาที่ 15 วินาทีอนุภาคมวล m มีค่าความเร็วคือ 60 เมตรต่อวินาที จากรูปที่ 4 (b) เป็นกราฟที่มีการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรความเร็วกับเวลาของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา โดยได้คิดแรงต้านอากาศที่เป็นฟังก์ชันความเร็วซึ่งในงานวิจัยนี้ได้มีการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง λ ดังนี้ $\lambda=0.200$, $\lambda=0.202$, $\lambda=0.204$ เมื่อเรากำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงมีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าของความเร็วของอนุภาคมวล m มีค่าเพิ่มขึ้นแปรผันโดยตรงกับค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง ณ เวลาที่ 15 วินาทีอนุภาคมวล m มีค่าความเร็วคือ 50 เมตรต่อวินาทีโดยประมาณ

การกระจัด

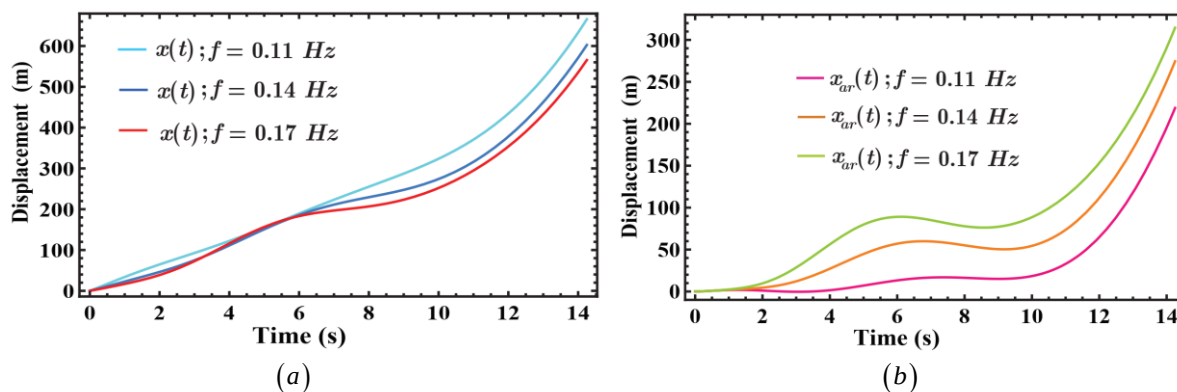
(1) กรณีกำหนดตัวแปรต้นคือ ค่าแรงเริ่มต้น (f_0)



รูปที่ 5 (a) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรการกระจัดกับเวลาของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันเวลา $F_1(t)$ และมีการเปลี่ยนแปลงค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 , (b) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรการกระจัดกับเวลาของวัตถุมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงต้านอากาศ f_d และแรงภายนอก $F_1(t)$ และมีการเปลี่ยนแปลงค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0

จากรูปที่ 5 (a) เป็นกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรการกระจัดกับเวลาของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันเวลา $F_1(t)$ กรณีไม่คิดแรงต้านอากาศ และมีการเปลี่ยนแปลงค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 ดังนี้ $f_0 = 12.0$, $f_0 = 13.0$, $f_0 = 14.0$ ณ ช่วงเวลา 0 วินาที ถึง 6 วินาที เมื่อค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 12.0 ไปเป็น 14.0 ทำให้ค่าของการกระจัดของอนุภาคมวล m มีค่าเพิ่ม แสดงว่าในช่วงเวลา 0 วินาที ถึง 6 วินาที การกระจัดของอนุภาคมวล m แปรผันโดยตรงกับค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 แต่ในช่วงเวลา 6 วินาที ถึง 12 วินาทีเป็นต้นไปการกระจัดของอนุภาคมวล m แปรผกผันกับค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 โดยที่ ณ เวลาที่ 15 วินาทีอนุภาคมวล m มีค่าการกระจัดอยู่ระหว่าง 250 - 300 เมตร (m) โดยประมาณ ต่อมาจากรูปที่ 5 (b) เป็นกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรการกระจัดกับเวลาของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันเวลา $F_1(t)$ และมีการคิดแรงต้านอากาศที่เป็นฟังก์ชันของความเร็ว ($f_d(v)$) ซึ่งในงานวิจัยนี้มีการเปลี่ยนแปลงค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 ดังนี้ $f_0 = 12.0$, $f_0 = 13.0$, $f_0 = 14.0$ ณ ช่วงเวลา 0 วินาที ถึง 6 วินาที เมื่อค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 12.0 ไปเป็น 14.0 ทำให้ค่าของการกระจัดของอนุภาคมวล m มีค่าเพิ่มแสดงว่าในช่วงเวลา 0 วินาที ถึง 6 วินาที การกระจัดของอนุภาคมวล m แปรผันโดยตรงกับค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 แต่ในช่วงเวลา 6 วินาที ถึง 12 วินาทีเป็นต้นไปการกระจัดของอนุภาคมวล m แปรผกผันกับค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 ณ เวลาที่ 15 วินาทีอนุภาคมวล m มีค่าการกระจัดเท่ากับ 150 - 200 เมตร โดยประมาณ

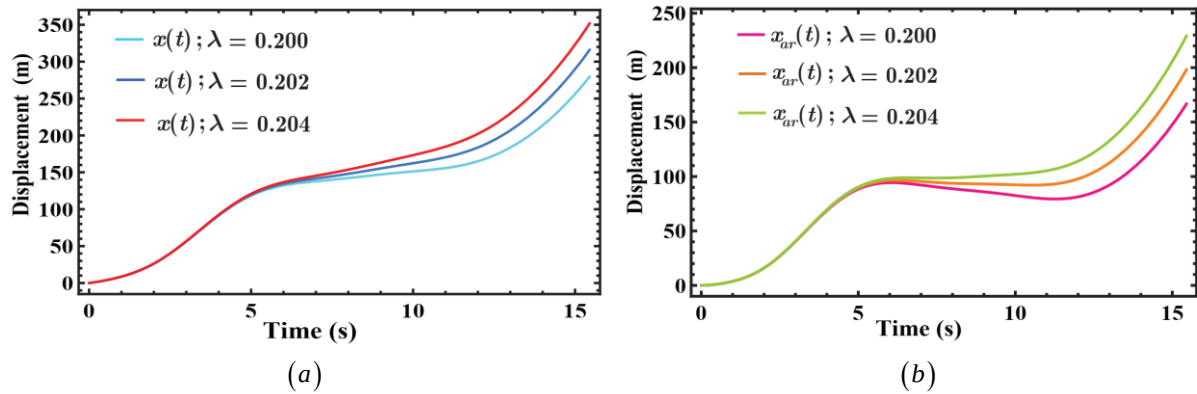
(2) กรณีกำหนดตัวแปรต้นคือ ค่าความถี่ของการสั่น (f)



รูปที่ 6 (a) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรการกระจัดกับเวลาของวัตถุมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันเวลา $F_1(t)$ และมีการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่ของการสั่น f , (b) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรการกระจัดกับเวลาของวัตถุมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงต้านอากาศ f_d และแรงภายนอก $F_1(t)$ และมีการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่ของการสั่น f

จากรูปที่ 6 (a) เป็นกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรการกระจัดกับเวลาของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันเวลา $F_1(t)$ กรณีไม่คิดแรงต้านอากาศ และมีการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่ของการสั่น f ดังนี้ $f = 0.11$ เฮิรตซ์, $f = 0.14$ เฮิรตซ์, $f = 0.17$ เฮิรตซ์ ณ ช่วงเวลา 0 วินาที ถึง 8 วินาที เมื่อค่าความถี่ของการสั่น f มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.11 Hz ไปเป็น 14.0 Hz ทำให้ค่าของการกระจัดของอนุภาคมวล m มีค่าเพิ่มแสดงว่าในช่วงเวลา 0 วินาที ถึง 6 วินาที การกระจัดของอนุภาคมวล m แปรผกผันกับค่าความถี่ของการสั่น f แต่ในช่วงเวลา 6 วินาที ถึง 12 วินาทีเป็นต้นไปการกระจัดของอนุภาคมวล m แปรผันตรงกับค่าความถี่ของการสั่น f โดยที่ ณ เวลาที่ 14 วินาทีอนุภาคมวล m มีค่าการกระจัดอยู่ระหว่าง 500 - 600 เมตร โดยประมาณ ต่อมาจากรูปที่ 6 (b) เป็นกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรการกระจัดกับเวลาของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันเวลา $F_1(t)$ และมีการคิดแรงต้านอากาศที่เป็นฟังก์ชันความเร็ว ($f_d(v)$) ซึ่งในงานวิจัยนี้มีการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่ของการสั่น f ดังนี้ $f = 0.11$ เฮิรตซ์, $f = 0.14$ เฮิรตซ์, $f = 0.17$ เฮิรตซ์ ณ ช่วงเวลา 0 วินาที ถึง 2 วินาที เมื่อค่าความถี่ของการสั่น f มีค่าเพิ่มขึ้นจาก $f = 0.11$ เฮิรตซ์ไปเป็น $f = 0.14$ เฮิรตซ์ ทำให้ค่าของการกระจัดของอนุภาคมวล m มีค่าคงที่ แสดงว่าในช่วงเวลา 0 วินาที ถึง 2 วินาที การกระจัดของอนุภาคมวล m มีค่าเท่ากัน แต่ในช่วงเวลา 2 วินาทีเป็นต้นไปการกระจัดของอนุภาคมวล m แปรผันตรงกับค่าความถี่ของการสั่น f โดยที่ ณ เวลาที่ 14 วินาทีอนุภาคมวล m มีค่าการกระจัดอยู่ระหว่าง 200 - 300 เมตร โดยประมาณ

(3) กรณีกำหนดตัวแปรต้นคือ ค่าของสัมประสิทธิ์ความหน่วง (λ)



รูปที่ 7 (a) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรการกระจัดกับเวลาของวัตถุมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $F_1(t)$ และมีการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง λ , (b) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรการกระจัดกับเวลาของวัตถุมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงต้านอากาศ f_d และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และมีการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง λ

จากรูปที่ 7 (a) เป็นกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรการกระจัดกับเวลาของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันเวลา $F_1(t)$ และมีการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง λ ดังนี้ $\lambda = 0.200$, $\lambda = 0.202$, และ $\lambda = 0.204$ ณ ช่วงเวลา 0 วินาที ถึง 5 วินาที เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง λ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.200 ไปเป็น 0.202 และ 0.204 ตามลำดับ ทำให้ค่าของการกระจัดของอนุภาคมวล m มีค่าเท่ากันแสดงว่าในช่วงเวลา 0 วินาที ถึง 5 วินาที การกระจัดของอนุภาคมวล m มีค่าคงที่ แต่ในช่วงเวลา 6 วินาที ถึง 12 วินาทีเป็นต้นไปเมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง λ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.200 ไปเป็น 0.202 และ 0.204 ตามลำดับ การกระจัดของอนุภาคมวล m แปรผันตรงกับค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง λ โดยที่ ณ เวลาที่ 15 วินาทีอนุภาคมวล m มีค่าการกระจัดอยู่ระหว่าง 250 - 350 เมตร โดยประมาณ ต่อมาจากรูปที่ 6 (b) เป็นกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรการกระจัดกับเวลาของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันเวลา $F_1(t)$ และมีการคิดแรงต้านอากาศที่เป็นฟังก์ชันความเร็ว ($f_d(v)$) ซึ่งในงานวิจัยนี้มีการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง λ ดังนี้ $\lambda = 0.200$, $\lambda = 0.202$, และ $\lambda = 0.204$ ณ ช่วงเวลา 0 วินาที ถึง 5 วินาที เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง λ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.200 ไปเป็น 0.202 และ 0.204 ตามลำดับ ทำให้ค่าของการกระจัดของอนุภาคมวล m มีค่าเท่ากันแสดงว่าในช่วงเวลา 0 วินาที ถึง 5 วินาที การกระจัดของอนุภาคมวล m มีค่าคงที่ แต่ในช่วงเวลา 6 วินาที ถึง 12 วินาทีเป็นต้นไปเมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง λ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.200 ไปเป็น 0.202 และ 0.204 ตามลำดับ การกระจัดของอนุภาคมวล m แปรผันตรงกับค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง λ โดยที่ ณ เวลาที่ 15 วินาทีอนุภาคมวล m มีค่าการกระจัดอยู่ระหว่าง 150 - 230 เมตร โดยประมาณ

สรุปผลการวิจัย

1. ความเร็วของอนุภาคมวล m แปรผันตรงกับค่าความถี่ของการสั่น (f) และค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงค่า (λ) แต่แปรผกผันกับค่าแรงภายนอกเริ่มต้น (f_0) เพิ่มขึ้น โดยที่ความเร็วของอนุภาคเคลื่อนที่ภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลกกรณีที่ไม่มีแรงต้านอากาศมีความเร็วสูงกว่าเมื่อมีแรงต้านอากาศ (f_d)
2. การกระจัดของอนุภาคมวล m แปรผันตรงกับค่าความถี่ของการสั่น (f) แต่แปรผกผันกับค่าแรงภายนอกเริ่มต้น (f_0) และค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงค่า (λ) โดยที่การกระจัดของอนุภาคเคลื่อนที่ภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลกกรณีที่ไม่มีแรงต้านอากาศมีการกระจัดของอนุภาคมากกว่าเมื่อมีแรงต้านอากาศ (f_d)
3. ข้อจำกัดในการนำเสนอกราฟความสัมพันธ์ระหว่างกรณีของความเร็วของอนุภาคมวล m กับเวลานั้น และกรณีของการกระจัดอนุภาคมวล m กับเวลานั้น พบว่า ในการกำหนดขนาดของตัวแปรต้นในที่นี้คือค่าแรงภายนอกเริ่มต้น (f_0) และ ค่าความถี่ของการสั่น (f) จะกำหนดค่าดังกล่าวที่แตกต่างกัน (แสดงดังตารางที่ 1 และตารางที่ 2) ทั้งนี้เพื่อที่จะทำให้การแสดงผลของเส้นกราฟมีความชัดเจน และสามารถพิจารณาผลที่เกิดขึ้นได้ง่ายขึ้นทั้งสองกรณี

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรดิตถ์ ที่ให้การสนับสนุนด้านสถานที่ และเวลาในการทำงานวิจัยจนกระทั่งงานสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

- จิราภรณ์ ปุณยวัจน์พรกุล และวิไลพร ลักษณะมีวาณิชย์. (2564). ผลของแรงต้านอากาศต่อการตกของกรวยกระดาษด้วยเทคนิควิเคราะห์วิถีโออัตรารวดสูง. *วารสารวิชาการและวิจัย มทร.พระนคร*, 15(2): 146-157.
- จิราวรรณ ทรัพย์ทิพย์, ปิยรัตน์ มูลศรี และอาทิตย์ หุ้เต็ม. (2021). การคำนวณหาความเร็วและการกระจัดของอนุภาคที่ถูกกระทบด้วยแรงภายนอกขึ้นกับเวลาที่เป็นฟังก์ชันโคไซน์และไซน์. *Journal of Science and Technology Phetchabun Rajabhat University*, 1(2), 1-7.
- ปิยรัตน์ มูลศรี, ศศิกานต์ ปานปรางณีเจริญ และอาทิตย์ หุ้เต็ม. (2022). การคำนวณหาความเร็ว และการกระจัดเคลื่อนที่ของวัตถุที่เคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ภายใต้แรงต้านอากาศ แรยยก และแรงภายนอกขึ้นอยู่กับเวลาที่สั้นในแกน y . *Journal of Earth Science, Astronomy and Space*, 5(1), 30-39.
- รัชนิ รุจิโรดม. (2558). *กลศาสตร์* (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- สมาน มงคลสกุลวงศ์. (2549). *ฟิสิกส์ทั่วไป 1* (เอกสารประกอบการสอน). กรุงเทพฯ: ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
- Cooper, I. (2018). *Motion of Falling Objects with Resistance: Doing Physics with Matlab Mechanics*. Retrieved from <https://www.scribd.com/document/394536480/Mec-Friction-2>.

- Ferreira, A., Seyffert, A. S. and Lemmer, M. (2017). Developing a graphical tool for students to understand air resistance and free fall: when heavier objects do fall faster. *Physics Education*, 52(3): 1-9.
- Grigore, I. and Barna, E. S. (2015). Using excel spreadsheets to study the vertical motion in a gravitational field. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 191: 2769 – 2775.
- Hutem, A. and Kerdmee, S. (2013). Physics learning achievement study: Projectile, using Mathematica program of faculty of science and technology Phetchabun Rajabhat university students. *European J of physics Education*, 4(3): 1-12.
- Paudel, D. R. (2019). Projectile motion using Mathematica. *Research Journal of Physical Sciences*, 7(3): 7-11.
- Serway, R. A. and Jewett, J. W. (2017). *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics* (10th ed.). Belmont: Brooks/Cole-Thomson Learning.
- Wolfram, S. (1994). *Mathematica: The Student Book*. (pp. 270, 271, 460). New York: Addison Wesley Publishing Company, Inc.
- Zimmerman, R. L. and Olness, F. I. (2002). *Mathematica for Physics* (2nd ed.). New York: Addison Wesley Publishing Company, Inc.