



การสร้างชุดการฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด
ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

CONSTRUCTION OF LEARNING PACKAGE THE EUCLIDEAN
GEOMETRY THEOREMS PROOF BY THE GEOMETER'S
SKETCHPAD PROGRAMS.

อภิวัฒน์ คำภีระ
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

ประจำปีงบประมาณ 2557



การสร้างชุดการฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยุคคิด
ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

CONSTRUCTION OF LEARNING PACKAGE THE EUCLIDEAN
GEOMETRY THEOREMS PROOF BY THE GEOMETER'S
SKETCHPAD PROGRAMS.

อภิวัดน์ คำภีระ
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

ทุนอุดหนุนโดยมหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์
ประเภททั่วไป ประจำปีงบประมาณ 2557

(ก)

ชื่อเรื่อง	การสร้างชุดการฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad Construction of Learning Package the Eucidean Geometry theorems proof by The Geometer's Sketchpad
ผู้วิจัย	อภิวัดน์ คำภีระ
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์. 2557.

บทคัดย่อ

การศึกษการสร้างชุดการฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เพื่อฝึกการสร้างรูปเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ทำให้ผู้เรียนใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สำหรับการฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด และเกิดการเปลี่ยนมุมมองการคิดทฤษฎีบทเรขาคณิต จากนามธรรมเป็นรูปธรรม สามารถยืนยันได้จากจำนวนนักศึกษาที่สามารถสร้าง และอธิบายการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 – 48 ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

คำสำคัญ : ทฤษฎีบทเรขาคณิต, ยูคลิด

Title CONSTRUCTION OF LEARNING PACKAGE THE EUCLIDEAN
GEOMETRY THEOREMS PROOF BY
THE GEOMETER'S SKETCHPAD PROGRAMS.

Researchers APBHIWAT KAMBHEERA

Organization Mathematics Major, Science and Technology Faculty
Phetchabun Rajabhat University***2014***

ABSTRACT

Study on the training set to prove the theorem Euclidean space Geometry with The Geometer's Sketchpad programs to practice in Euclidean space geometry. This program has an impact on students used the coaching program for proving theorem geometry of Euclid space and a change of thinking towards a geometrical theorem. Moreover, the transition from abstract ideas into concrete. Which can be confirmed by the number of students who can create the theorem is 1 - 48 with The Geometer's Sketchpad.

Keyword : Geometry Theorems, Euclid

(ค)

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยเล่มนี้สำเร็จด้วยดี ด้วยความร่วมมือและความช่วยเหลือจากบุคลากรคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี และนักศึกษาหลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ ที่ให้ความร่วมมือในการสืบค้นข้อมูล และข้อเท็จจริงต่าง ๆ ขอบคุณสถาบันวิจัยและพัฒนา ที่ติดตามความก้าวหน้าเป็นระยะอย่างต่อเนื่อง รวมถึงข้อเสนอแนะต่าง ๆ อันเป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่อการดำเนินการวิจัยในครั้งนี้

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชัยณรงค์ ชันผณี เป็นอย่างสูง ที่ได้ให้ความกรุณา ให้คำปรึกษาแนะนำ ให้แก่ผู้วิจัย ท้ายสุดนี้ขอขอบพระคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ที่ได้ให้ทุนอุดหนุนการวิจัยครั้งนี้มา ณ ที่นี้ด้วย

อภิวัฒน์ คำภีระ

29 สิงหาคม 2557

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ข
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญตาราง	ฉ
สารบัญภาพ	ณ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 หลักการและเหตุผล	1
1.2 วัตถุประสงค์งานวิจัย	2
1.3 ขอบเขตงานวิจัย	3
1.4 นิยามศัพท์	3
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน	4
2.1 การพิสูจน์	4
2.2 การพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตของยูคลิด	6
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย	29
3.1 การสร้างรูปเรขาคณิตจากเครื่องมือจุด วงเวียน และเส้น ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad	29
3.2 การค้นหาความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิตจากเครื่องมือจุด วงเวียน และเส้น กับทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad	31
3.3 การสร้างรูปเรขาคณิต เพื่ออธิบายการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิต ในระนาบของยูคลิด	32
3.4 จำนวนผู้เรียนที่สามารถสร้างรูปเรขาคณิต เพื่ออธิบายการพิสูจน์ ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad	32
บทที่ 4 ผลการวิจัย	34
4.1 ผลสร้างรูปเรขาคณิต เพื่อแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิต ในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad	34
4.2 ร้อยละของนักศึกษาที่พิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad	72

(จ)

สารบัญ (ต่อ)

บทที่ 5	สรุป อภิปรายผล	74
5.1	สรุปผลสร้างรูปเรขาคณิต เพื่อแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิต ในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad	74
5.2	อภิปรายผลการสร้างรูปเรขาคณิต เพื่อแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิต ในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad	81
บรรณานุกรม		82
ภาคผนวก		83
ภาคผนวก ก.	การพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad	84
ภาคผนวก ข.	มคอ.3 รายวิชา โปรแกรมสำเร็จรูปด้านคณิตศาสตร์	173
ภาคผนวก ค.	การนำงานวิจัยไปใช้ประโยชน์	185
ประวัตินักวิจัย		188

สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 3.1 ตารางแสดงจำนวนผู้เรียนที่สามารถสร้างรูปเรขาคณิต เพื่ออธิบายการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad	32
ตารางที่ 4.1 ตารางแสดงความยาวของด้าน ของรูปสามเหลี่ยม ABC	34
ตารางที่ 4.2 ตารางแสดงความยาวด้าน $\overline{AL}$ และ ความยาวด้าน $\overline{BC}$	35
ตารางที่ 4.3 ตารางแสดงความยาวด้าน $\overline{AD}$ และ ความยาวด้าน $\overline{AE}$	36
ตารางที่ 4.4 ตารางแสดงความยาวด้าน และขนาดของมุม ของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF	36
ตารางที่ 4.5 ตารางแสดงความยาวด้าน และขนาดของมุมที่ต่อออกไปจากฐาน ของรูปสามเหลี่ยม ABC	37
ตารางที่ 4.6 ตารางแสดงความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เท่ากันสองมุม	38
ตารางที่ 4.7 ตารางแสดงความยาวของด้านที่เกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงจาก จุดปลาย A และ B	39
ตารางที่ 4.8 ตารางแสดงความยาวด้าน และขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามฐานของ รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม EFG	40
ตารางที่ 4.9 ตารางแสดงการแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้	40
ตารางที่ 4.10 ตารางแสดงความยาวของเส้นตรง	41
ตารางที่ 4.11 ตารางแสดงขนาดของมุมที่เกิดจากการลากเส้นมาตั้งฉาก กับเส้นตรงที่กำหนดให้	41
ตารางที่ 4.12 ตารางแสดงขนาดของมุมที่เกิดจากการลากเส้นจากจุดที่กำหนดให้ มาตั้งฉากกับเส้นตรง	42
ตารางที่ 4.13 ตารางแสดงขนาดของมุมประชิด	43
ตารางที่ 4.14 ตารางแสดงขนาดของมุมประชิด	43
ตารางที่ 4.15 ตารางแสดงขนาดของมุม CBD , DBF , DBE และ CBF	44
ตารางที่ 4.16 ตารางแสดงขนาดของมุมภายใน และมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยม ABC	45
ตารางที่ 4.17 ตารางแสดงขนาดของมุมภายใน และผลบวกของมุมภายใน ของรูปสามเหลี่ยม ABC	45
ตารางที่ 4.18 ตารางแสดงความยาวด้าน และขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม BCD	46
ตารางที่ 4.19 ตารางแสดงขนาดของมุม และความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC	47
ตารางที่ 4.20 ตารางแสดงผลรวมของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC	47

สารบัญตาราง (ต่อ)

	หน้า
ตารางที่ 4.21 ตารางแสดงผลรวมของด้านสองด้าน และขนาดของมุมที่ประกอบด้าน ของรูปสามเหลี่ยม ABC	48
ตารางที่ 4.22 ตารางแสดงความยาวของด้านที่กำหนดให้ และความยาว ของด้านประกอบของรูปสามเหลี่ยม DEF	49
ตารางที่ 4.23 ตารางแสดงขนาดของมุม MON และขนาดของมุม DCB	50
ตารางที่ 4.24 ตารางแสดงความยาวด้าน และขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม BCD	51
ตารางที่ 4.25 ตารางแสดงความยาวด้าน ขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF	52
ตารางที่ 4.26 ตารางแสดงความยาวด้าน ขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF	53
ตารางที่ 4.27 ตารางแสดงขนาดของมุมแย้ง	54
ตารางที่ 4.28 ตารางแสดงขนาดของมุมภายในและมุมภายนอก	55
ตารางที่ 4.29 ตารางแสดงขนาดของมุมแย้ง และมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด	56
ตารางที่ 4.30 ตารางแสดงขนาดของมุมแย้ง และมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด	57
ตารางที่ 4.31 ตารางแสดงขนาดของมุมแย้ง และมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด	58
ตารางที่ 4.32 ตารางแสดงขนาดของมุมภายนอก และมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC	58
ตารางที่ 4.33 ตารางแสดงความยาวด้าน และมุมภายในที่เกิดจากการลากส่วนของ เส้นตรงเชื่อมจุดปลายข้างเดียวกันของส่วนของเส้นตรงสองเส้น ที่ยาวเท่ากัน และขนานกัน	59
ตารางที่ 4.34 ตารางแสดงความยาวด้าน และขนาดมุม ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD	60
ตารางที่ 4.35 ตารางแสดงพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD และรูปสี่เหลี่ยม BEFC	61
ตารางที่ 4.36 ตารางแสดงพื้นที่ ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD และรูปสี่เหลี่ยม EFGH	61
ตารางที่ 4.37 ตารางแสดงพื้นที่ ของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม BCD	62
ตารางที่ 4.38 ตารางแสดงความยาวฐาน และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF	63
ตารางที่ 4.39 ตารางแสดงพื้นที่ และมุมแย้ง ของรูปสี่เหลี่ยม ABC และรูปสี่เหลี่ยม BCD ที่มีจุดยอดอยู่บนเส้นตรง $\overline{GH}$	63
ตารางที่ 4.40 ตารางแสดงพื้นที่ ความยาวฐาน และมุมแย้ง ของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF	64

สารบัญตาราง (ต่อ)

	หน้า
ตารางที่ 4.41 ตารางแสดงพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABD รูปสามเหลี่ยม BCD และรูปสี่เหลี่ยม ABCI	65
ตารางที่ 4.42 ตารางแสดงพื้นที่ ของรูปสี่เหลี่ยม GEYF และพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC	65
ตารางที่ 4.43 ตารางแสดงพื้นที่ ของรูปสี่เหลี่ยม BGKE และรูปสี่เหลี่ยม KFDH	66
ตารางที่ 4.44 ตารางแสดงพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน GEYF พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC และขนาดมุม BAC ของรูปสามเหลี่ยม ABC ขนาดมุม EGF ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน GEYF	67
ตารางที่ 4.45 ตารางแสดงขนาดมุม DAB ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD ขนาดมุม FEH ของรูปสี่เหลี่ยม EFGH พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม EFGH	68
ตารางที่ 4.46 ตารางแสดงความยาวด้าน ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD	69
ตารางที่ 4.47 ตารางแสดงพื้นที่ของจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก พื้นที่ของจัตุรัส บนด้านตรงข้ามมุมฉาก ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC	70
ตารางที่ 4.48 ตารางแสดงแสดงพื้นที่ของจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก พื้นที่ของจัตุรัส บนด้านตรงข้ามมุมฉาก ของรูปสามเหลี่ยมมุม ABC	71
ตารางที่ 4.49 ตารางแสดงจำนวนผู้เรียนที่สามารถสร้างรูปเรขาคณิต เพื่ออธิบายการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad	72

(ณ)

สารบัญภาพ

	หน้า
ภาพที่ 3.1 แสดงส่วนของเส้นตรง AB	27
ภาพที่ 3.2 แสดงส่วนของเส้นตรง DE ตัดกับ AB ที่จุด C จะได้ระยะ $AC = CB$	27
ภาพที่ 3.3 แสดงส่วนของเส้นตรง AB และ CD	28
ภาพที่ 3.4 แสดงส่วนของเส้นตรง $AB = CE$	28
ภาพที่ 3.5 แสดง $\hat{BAC}$ และ $\hat{DEF}$	28
ภาพที่ 3.6 แสดง $m(\hat{XEF}) = m(\hat{BAC})$	29
ภาพที่ 3.7 แสดงการแบ่งเส้นตรง AB ออกเป็นห้าส่วนเท่าๆ กัน	30
ภาพที่ 3.8 แสดงการแบ่งเส้นตรง AB ออกเป็นห้าส่วนเท่าๆ กัน	30
ภาพที่ 3.9 แสดง CD ตั้งฉากกับเส้นตรง AB ณ จุด C	30
ภาพที่ 3.10 แสดง AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง และจุด E เป็นจุดภายนอก	31
ภาพที่ 3.11 แสดงส่วนของเส้นตรง EF ตั้งฉากกับเส้นตรง AB ที่จุด C	31
ภาพที่ 4.1 แสดงรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งสร้างบนส่วนของเส้นตรง AB	34
ภาพที่ 4.2 แสดงความยาวด้าน $\overline{AL}$ และ ความยาวด้าน $\overline{BC}$	35
ภาพที่ 4.3 แสดง แสดงความยาวด้าน $\overline{AD}$ และ ความยาวด้าน $\overline{AE}$	36
ภาพที่ 4.4 แสดงแสดงความยาวด้าน และขนาดของมุม ของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF	37
ภาพที่ 4.5 แสดงความยาวด้าน และขนาดของมุมที่ต่อออกไปจากฐาน ของรูปสามเหลี่ยม ABC	38
ภาพที่ 4.6 แสดงความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เท่ากันสองมุม	38
ภาพที่ 4.7 แสดงความยาวของด้านที่เกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงจาก จุดปลาย A และ B	39
ภาพที่ 4.8 แสดงความยาวด้าน และขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามฐานของ รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม EFG	40
ภาพที่ 4.9 แสดงการแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้	40
ภาพที่ 4.10 แสดงการแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้	41
ภาพที่ 4.11 แสดงการลากเส้นมาตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้	42
ภาพที่ 4.12 แสดงการลากเส้นจากจุดที่กำหนดให้ มาตั้งฉากกับเส้นตรง	42

(ญ)

สารบัญภาพ (ต่อ)

	หน้า
ภาพที่ 4.13 แสดงขนาดของมุมประชิดแต่ละมุมเป็นมุมฉาก หรือมุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก	43
ภาพที่ 4.14 แสดงมุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก และเส้นตรงทั้งสองต่อเป็นเส้นตรงเดียวกัน	44
ภาพที่ 4.15 แสดงขนาดของมุม CBD , DBF , DBE และ CBF	44
ภาพที่ 4.16 แสดงขนาดของมุมภายใน และมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยม ABC	45
ภาพที่ 4.17 แสดงขนาดของมุมภายใน และผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC	46
ภาพที่ 4.18 แสดงความยาวด้าน และขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC	46
ภาพที่ 4.19 แสดงขนาดของมุม และความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC	47
ภาพที่ 4.20 แสดงผลรวมของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC	48
ภาพที่ 4.21 แสดงผลรวมของด้านสองด้าน และขนาดของมุมที่ประกอบด้าน ของรูปสามเหลี่ยม ABC	49
ภาพที่ 4.22 แสดงความยาวของด้านที่กำหนดให้ และความยาวของด้านประกอบ ของรูปสามเหลี่ยม DEF	50
ภาพที่ 4.23 แสดงขนาดของมุม MON และขนาดของมุม DCB	51
ภาพที่ 4.24 แสดงขนาดของมุม MON และขนาดของมุม DCB	52
ภาพที่ 4.25 แสดงความยาวด้าน ขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF	53
ภาพที่ 4.26 แสดงความยาวด้าน ขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF	54
ภาพที่ 4.27 แสดงความยาวด้าน ขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF	55
ภาพที่ 4.28 แสดงขนาดของมุมภายในและมุมภายนอก	56
ภาพที่ 4.29 แสดงขนาดของมุมแย้ง และมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด	56
ภาพที่ 4.30 แสดงขนาดของมุมแย้ง และมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด	57
ภาพที่ 4.31 แสดงขนาดของมุมแย้ง และมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด	58
ภาพที่ 4.32 แสดงขนาดของมุม DCA ซึ่งเป็นมุมภายนอก และมุม ABC , BAC ซึ่งเป็นมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC	59
ภาพที่ 4.33 แสดงความยาวด้าน $\overline{AD}$ และด้าน $\overline{BC}$ และขนาดของมุม BAC , ACD	59

สารบัญภาพ (ต่อ)

	หน้า
ภาพที่ 4.34 แสดงความยาวด้าน และขนาดมุม ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD	60
ภาพที่ 4.35 แสดงพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD และรูปสี่เหลี่ยม BEFC	61
ภาพที่ 4.36 แสดงพื้นที่ ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD และรูปสี่เหลี่ยม EFGH	62
ภาพที่ 4.37 แสดงความยาวด้าน และขนาดมุม ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD	62
ภาพที่ 4.38 แสดงความยาวด้าน และขนาดมุม ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD	63
ภาพที่ 4.39 แสดงพื้นที่ และมุมแย้ง ของรูปสี่เหลี่ยม ABC และรูปสี่เหลี่ยม BCD ที่มีจุดอยู่บนเส้นตรง $\overline{GH}$	64
ภาพที่ 4.40 แสดงความยาวด้าน และขนาดมุม ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD	64
ภาพที่ 4.41 แสดงพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABD รูปสามเหลี่ยม BCD และรูปสี่เหลี่ยม ABCI	65
ภาพที่ 4.42 แสดงพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม GEYF และพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC	66
ภาพที่ 4.43 แสดงแสดงพื้นที่ ของรูปสี่เหลี่ยม BGKE และรูปสี่เหลี่ยม KFDH	66
ภาพที่ 4.44 แสดงพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน GEYF พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC และขนาดมุม BAC ของรูปสามเหลี่ยม ABC ขนาดมุม EGF ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน GEYF	67
ภาพที่ 4.45 แสดงขนาดมุม DAB ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD ขนาดมุม FEH ของรูปสี่เหลี่ยม EFGH พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม EFGH	68
ภาพที่ 4.46 แสดงความยาวด้าน ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD	69
ภาพที่ 4.47 แสดงพื้นที่ของจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก พื้นที่ของจัตุรัสบน ด้านตรงข้ามมุมฉาก ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC	70
ภาพที่ 4.48 แสดงพื้นที่ของจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก พื้นที่ของจัตุรัสบน ด้านตรงข้ามมุมฉาก ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC	71

บทที่ 1

บทนำ

1.1 หลักการและเหตุผล

การพัฒนาบุคลากรที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนของคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีเพื่อให้มีความพร้อมและมีความสามารถในการจัดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญนอกจากเป็นการปฏิบัติตามกฎหมายการศึกษาแล้ว ยังเป็นการปฏิรูปการเรียนการสอนของอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์-วิทยาศาสตร์ให้มีความสามารถในการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญด้วยการนำเทคโนโลยีเข้าใช้ในชั้นเรียน มีการออกแบบและจัดการที่เหมาะสม เพื่อการส่งเสริมประสิทธิภาพการสอนของครูพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และฉบับแก้ไข พ.ศ. 2545 ได้ระบุถึงการปฏิรูปการเรียนการสอนที่ใช้รูปแบบการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ให้เน้นการเรียนรู้ของผู้เรียน ให้ผู้เรียนได้คิดวิเคราะห์และพัฒนาให้เป็นผู้เรียนรู้ตลอดชีวิต คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเพชรบูรณ์ ได้ตระหนักถึงความสำคัญในการถ่ายทอดองค์ความรู้และเทคโนโลยี เพื่อพัฒนาคุณภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์-วิทยาศาสตร์ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ให้แก่ อาจารย์ หรือ ครูผู้สอนคณิตศาสตร์-วิทยาศาสตร์ของคณะ ให้สามารถนำไปปรับใช้ให้เหมาะสมกับการเรียนการสอนของนักเรียน นักศึกษา เพื่อยกระดับผลสัมฤทธิ์การเรียนรู้วิชาทางด้านคณิตศาสตร์-วิทยาศาสตร์ของนักเรียน นักศึกษาในจังหวัดเพชรบูรณ์และใกล้เคียง ให้สูงขึ้น กรอบกับวิสัยทัศน์มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ ที่ว่า “มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ เป็นแหล่งองค์ความรู้ทางวิชาการที่ส่งเสริมคุณภาพชีวิตของคนในสังคม บนพื้นฐานปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง” และวิสัยทัศน์ของคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่ว่า “มุ่งสู่มาตรฐานอุดมศึกษา สานคุณค่าอัตลักษณ์วิทยาศาสตร์ เพื่อเป็นแหล่งองค์ความรู้ของชุมชนอย่างยั่งยืน” ดังนั้น การสร้างองค์ความรู้จากความสำเร็จและความเชี่ยวชาญ และประสบการณ์โดยสร้างเอกสารวิชาการเพื่อบริการวิชาการ และการวิจัย จึงเป็นสิ่งจำเป็นที่ต้องพัฒนาขีดสมรรถนะของบุคลากรให้สอดคล้องตามวิสัยทัศน์ของมหาวิทยาลัย เพื่อให้บรรลุตาม ยุทธศาสตร์มหาวิทยาลัยข้อที่ 2 : สร้างและพัฒนาองค์ความรู้ โดยบูรณาการศาสตร์สากลกับภูมิปัญญาท้องถิ่น และยุทธศาสตร์ของคณะ ฯ ในประเด็นยุทธศาสตร์ที่ 2 : การสร้างและพัฒนางานวิจัยและเผยแพร่องค์ความรู้โดยบูรณาการศาสตร์สากลเข้ากับภูมิปัญญาท้องถิ่น โดยต้องการให้เกิดผลลัพธ์บรรลุตามเป้าประสงค์ข้อที่ 1 : เพื่อมีการวิจัย หรือ การประดิษฐ์ หรือ งานสร้างสรรค์ทางวิทยาศาสตร์ที่มีการบูรณาการศาสตร์สากลกับภูมิปัญญาท้องถิ่น **กลยุทธ์ 2.1** : สนับสนุนการสร้างนักวิจัยรุ่นใหม่ที่มีความสามารถและเพิ่มศักยภาพอาจารย์ด้วยการส่งเสริมและสนับสนุนการพัฒนาองค์ความรู้เกี่ยวกับเทคโนโลยีใหม่ ๆ อย่างต่อเนื่อง (Train the Trainer) เพื่อให้สอดคล้องกับความเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วของเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสารเพื่อเพิ่มขีดความสามารถในการแข่งขันในระดับอนุภูมิภาคและภูมิภาคอาเซียน ซึ่งจะส่งเสริมให้ทรัพยากรบุคคลของคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มีการพัฒนาองค์ความรู้อย่างยั่งยืน มีการใช้และพัฒนานวัตกรรมการเรียนรู้ที่ประยุกต์ใช้เทคโนโลยีที่เหมาะสม ส่งเสริมการเรียนการสอนมากขึ้น

หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิตบัณฑิตสาขาวิชาคณิตศาสตร์ มุ่งที่จะสร้างบัณฑิตคณิตศาสตร์ให้มีคุณภาพ สามารถดำเนินชีวิตด้วยปัญญา สามารถบูรณาการความรู้ ทักษะ และคุณธรรมจริยธรรมไปสู่

การประกอบสัมมาอาชีพ การจัดการศึกษาและพัฒนาผู้เรียนให้เป็นคนดี คนเก่ง และมีทักษะจำเป็นพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เพื่อจะเป็นผู้นำพาชุมชนและสังคมไทยพัฒนาไปสู่การพึ่งตนเองได้อย่างยั่งยืน และอยู่ร่วมกับสังคมโลกอย่างมีคุณภาพ หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ได้ตระหนักถึงความสำคัญดังกล่าว จึงจัดให้มีการพัฒนาคุณภาพการเรียนการสอนหลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนานักศึกษาด้านคุณลักษณะเฉพาะและคุณลักษณะที่พึงประสงค์ของนักศึกษาหลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ในแต่ละปี การศึกษา อาทิ **ชั้นปีที่ 1** ให้นักศึกษามีสัมมาคารวะ เคารพผู้อาวุโส มีมนุษยสัมพันธ์กับเพื่อน ครู อาจารย์ และผู้บริหาร **ชั้นปีที่ 2** ให้นักศึกษามีความสามารถพื้นฐานในการใช้คอมพิวเตอร์เพื่อการพิมพ์ Font Math มีความสามารถในการใช้คณิตศาสตร์พื้นฐานเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ เช่น เซต ตรรกศาสตร์ ฟังก์ชัน และการพิสูจน์เบื้องต้น **ชั้นปีที่ 3** ให้นักศึกษามีความสามารถในการสืบค้นวิทยาการทางคณิตศาสตร์ จาก Internet มีความสามารถในการถ่ายทอดเนื้อหาจากประสบการณ์ตรงแบบเผชิญหน้า **ชั้นปีที่ 4** ให้นักศึกษามีความสามารถในการคิดวิเคราะห์ พิสูจน์ และเขียนอธิบายการพิสูจน์ได้ มีความสามารถพื้นฐานในการศึกษาค้นคว้าแบบโปรเจก (Project Based Learning) ทางคณิตศาสตร์ มีความสามารถในการปรับตัวเข้ากับองค์กรนำความรู้ประสบการณ์ไปปรับใช้กับหน่วยงานองค์กรต่าง ๆ ทั้งภาครัฐและเอกชน และมีความสามารถในการศึกษาค้นคว้าแบบโปรเจก (Project Based Learning) ทางคณิตศาสตร์เต็มรูปแบบ

สำหรับในด้านความรู้ ด้านทักษะทางปัญญา ด้านทักษะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและความรับผิดชอบ และด้านทักษะการวิเคราะห์เชิงตัวเลข การสื่อสาร และเทคโนโลยี และ กิจกรรมวิชาการที่ส่งเสริมคุณลักษณะบัณฑิตที่พึงประสงค์ของหลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มุ่งดำเนินการส่งเสริมกิจกรรมต่าง ๆ เพื่อให้นักศึกษาคณิตศาสตร์ได้เรียนรู้และมีพัฒนาการตามขั้นปี สอดคล้องกับการเรียนรู้ตามกรอบมาตรฐานคุณวุฒิระดับอุดมศึกษาแห่งชาติทั้ง 5 ด้าน ผู้วิจัยในฐานะหัวหน้าโครงการวิจัย เรื่อง การสร้างชุดการฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad มีความประสงค์ที่จะสร้างชุดการฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เพื่อการพัฒนาการเรียนรู้ของครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ รวมทั้งนักศึกษาสาขาวิชาทางด้านคณิตศาสตร์ และบุคลากรทางการศึกษาในเขตพื้นที่จังหวัดเพชรบูรณ์ ที่จะสร้างคุณค่าในการจัดการเรียนการสอนอย่างมีคุณภาพเพื่อให้เกิดการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์อย่างยั่งยืน ต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์งานวิจัย

1. ให้ผู้เรียนใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เพื่อฝึกการสร้างรูปเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด
2. ให้ผู้เรียนใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สำหรับการฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด
3. ให้ผู้เรียนเกิดการเปลี่ยนมุมมองการคิดทฤษฎีเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด จากนามธรรมเป็นรูปธรรม

1.3 ขอบเขตงานวิจัย

3.1 ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร คือ นักศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์

กลุ่มตัวอย่าง คือ นักศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ที่ลงทะเบียนเรียนวิชา โปรแกรมสำเร็จรูปด้านคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2556

3.2 ตัวแปรที่ใช้ในการศึกษา

ตัวแปรอิสระ คือ ชุดการฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

ตัวแปรตาม คือ ร้อยละของผู้ที่สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

1.4 นิยามศัพท์

การพิสูจน์ คือ การพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

ทฤษฎีบทเรขาคณิต คือ ทฤษฎีบททางเรขาคณิตในระนาบของยูคลิดตั้งแต่ทฤษฎีบทที่ 1 – 48

GSP คือ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

2.1 การพิสูจน์

ในการพิสูจน์ประพจน์ของยุคลิดนั้น ยุคลิดได้วางเงื่อนไขการพิสูจน์ตามระบบเชิงสัจพจน์ไว้เป็นอย่างดี โดยมีการกำหนด สิ่งที่เห็นจริง หรืออักษิยม 5 ประพจน์ แยกออกไว้ต่างหากจากสัจพจน์ทางเรขาคณิต 5 ประพจน์ และนิยาม 23 นิยาม ดังนี้

2.1.1 อักษิยม (axioms) หรือ สิ่งที่เห็นจริง (common notions)

- A_1 : สิ่งทั้งหลายซึ่งเท่ากับสิ่งเดียวกันย่อมเท่ากัน
- A_2 : ถ้าเอาสิ่งที่เท่ากันมาเพิ่มให้สิ่งที่เท่ากันแล้ว ผลย่อมเท่ากัน
- A_3 : ถ้าเอาสิ่งที่เท่ากันออกจากสิ่งที่เท่ากันแล้ว ส่วนที่เหลือย่อมเท่ากัน
- A_4 : สิ่งทั้งหลายซึ่งทับกันได้สนิทนั้น ย่อมเท่ากัน
- A_5 : ส่วนทั้งหมดย่อมใหญ่กว่าบางส่วน

2.1.2 สัจพจน์ทางเรขาคณิต

- P_1 : สามารถลากเส้นตรงจากจุดหนึ่งไปยังจุดอีกจุดหนึ่งได้
- P_2 : สามารถต่อเส้นตรงที่เห็นว่ามีจำกัด ออกไปโดยไม่มีที่สิ้นสุดได้
- P_3 : สามารถเขียนวงกลมที่มีจุด ๆ หนึ่งเป็นจุดศูนย์กลางและมีรัศมียาวเท่ากับเส้นตรงที่ จำกัดความยาวใด ๆ ที่ลากมาจากจุดศูนย์กลางนั้นได้
- P_4 : มุมฉากทุกมุมย่อมเท่ากัน
- P_5 : ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงสองเส้นโดยทำให้มุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเข้าน้อยกว่าสองมุมฉากแล้ว ถ้าต่อเส้นตรงทั้งสองออกไปโดยไม่มีที่สิ้นสุด เส้นตรงทั้งสองนั้นจะไปตัดกันทางด้านที่มีมุมรวมกันได้น้อยกว่าสองมุมฉากนั้น

2.1.3 นิยาม (definitions)

- D_1 : จุด คือ สิ่งซึ่งไม่มีความกว้าง ความยาวและความหนา
- D_2 : เส้น คือ สิ่งที่มีแต่ความยาว ไม่มีความกว้าง
- D_3 : ปลายของเส้นตรง คือ จุด
- D_4 : เส้นตรง คือ เส้นซึ่งประกอบด้วยจุดวางเรียงกัน
- D_5 : พื้นที่ผิว คือ พื้นที่ของด้านที่มีแต่ความยาวและกว้างเท่านั้น
- D_6 : ปลายสุดของพื้นที่ผิว คือ เส้น
- D_7 : พื้นที่ผิวซึ่งอยู่ในระนาบหนึ่ง คือ พื้นที่ซึ่งประกอบด้วยเส้นตรงวางเรียงกัน
- D_8 : มุมในระนาบ คือ มุมที่เกิดจากเส้นตรง 2 เส้น มาพบกันซึ่งเส้นตรงสองเส้นนี้จะต้องไม่ทับกัน

- D_9 : เมื่อมุมที่ประกอบด้วยเส้นตรง 2 เส้น เป็นเส้นตรงซึ่งต่อกัน เรียกมุมนั้นว่า มุมตรง
- D_{10} : เส้นตรงเส้นหนึ่ง ถูกนำไปตั้งบนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง แล้วทำให้มุมประชิดกัน เท่ากันแล้ว แต่ละมุมที่เท่ากัน เรียกว่า มุมฉาก และเส้นตรงนั้นเรียกว่า เส้นตั้งฉาก
- D_{11} : มุมป้าน คือ มุมที่โตกว่า 1 มุมฉาก
- D_{12} : มุมแหลม คือ มุมที่เล็กกว่า 1 มุมฉาก
- D_{13} : ขอบเขต (Boundary) คือ ปลายสุดของทุกสิ่ง
- D_{14} : รูปร่าง คือ สิ่งซึ่งประกอบด้วยขอบเขตเดียว หรือหลายขอบเขต
- D_{15} : วงกลม คือ รูปร่างที่อยู่ในระนาบเดียว ซึ่งประกอบด้วยเส้น เส้นหนึ่งซึ่งทำให้เส้นตรงทั้งหลายอยู่ห่างจากจุด ๆ หนึ่ง เป็นระยะทางเท่ากันและจุด ๆ นั้น เรียกว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม
- D_{16} : เส้นผ่านศูนย์กลาง คือ เส้นตรงที่ลากผ่านจุดศูนย์กลาง และไปสิ้นสุดลงที่เส้นรอบวง ตรงข้ามทั้งสอง และแบ่งวงกลมออกเป็น 2 ส่วน
- D_{17} : ครึ่งวงกลม คือ รูปซึ่งประกอบด้วยเส้นผ่านศูนย์กลาง และเส้นรอบวงที่ตัดออกและจุดศูนย์กลางของครึ่งวงกลม ก็คือ จุดเดียวกับจุดศูนย์กลางของวงกลม
- D_{18} : รูปที่ล้อมรอบด้วยเส้นตรง มีลักษณะ ดังนี้
 รูป 3 เหลี่ยม คือ รูปที่ประกอบด้วยเส้นตรง 3 ด้าน
 รูป 4 เหลี่ยม คือ รูปที่ประกอบด้วยเส้นตรง 4 ด้าน
 รูป 5 เหลี่ยม คือ รูปที่ประกอบด้วยเส้นตรง 5 ด้าน
- D_{19} : รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันทั้ง 3 ด้าน
 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากัน 2 ด้าน
 รูปสามเหลี่ยมใดๆ คือ รูปสามเหลี่ยมที่ไม่มีด้านคู่ไหนเท่ากันเลย
- D_{20} : รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ รูปสามเหลี่ยมมุม ๆ หนึ่งเป็นมุมฉาก
 รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน คือ รูปสามเหลี่ยมมุม ๆ หนึ่งเป็นมุมป้าน
 รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม คือ รูปสามเหลี่ยมมุม ๆ หนึ่งเป็นมุมแหลม
- D_{21} : รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้ง 4 เท่ากัน และมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก
- D_{22} : รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉากและมีด้านที่อยู่ตรงข้ามกันเท่ากันรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านเท่ากันแต่มุมทุกมุมไม่เท่ากับมุมฉากรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามเท่ากัน และมุมตรงข้ามเท่ากันแต่มุมไม่เป็นมุมฉากรูปสี่เหลี่ยมคางหมู คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านไม่เท่ากัน แต่จะมีด้านขนานกัน 1 คู่รูปสี่เหลี่ยมที่ต่างไปจากนี้ เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า

D_{23} : เส้นขนาน คือ เส้นสองเส้นหรือมากกว่าสองเส้น ซึ่งอยู่ในระนาบเดียวกัน
และต่อออกไป อย่างไม่จำกัดในทิศทางทั้งสองนั้นจะไม่มีวันที่จะพบกันเลย
ในทิศทางใด ๆ ก็ตาม

2.2 การพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตของยูคลิด

- ทฤษฎีบท 1** สามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าบนส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้
- พิสูจน์** จะต้องแสดงว่า รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า
เพราะว่า จุด A เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม ABC รัศมี AB โดยนิยาม D_{15}
ทำให้ได้ว่า $AB = AC$ เพราะจุด B เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม BCA
รัศมี AB โดยนิยาม D_{15} ทำให้ได้ว่า $BC = BA$
แต่ $AB = BA$ โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1 จึงได้ว่า $AB = AC = BC$
- ดังนั้น** รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งสร้างบนส่วนของเส้นตรง AB
- ช.ต.ส.** (quad erat facierdum; Q.E.F)
- ทฤษฎีบท 2** สามารถสร้างส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดที่กำหนดให้ ให้ยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้
- พิสูจน์** จะต้องแสดงว่า ส่วนของเส้นตรง AL ยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรง BC
เพราะว่า B เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม BCG ดังนั้น $BC = BG$
เพราะว่า D เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม DLG ดังนั้น $DL = DG$
แต่จากการสร้างให้ $DA = DB$
โดยสิ่งที่เห็นจริง A_3 จึงได้ $DL - DA = DG - DB$
โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1 ดังนั้น $AL = BG$
แต่ $BG = BC$ โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1 จึงได้ $AL = BC$
นั่นคือ สามารถสร้างส่วนของเส้นตรง AL ให้ยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรง AB
- ช.ต.ส.** (quad erat facierdum; Q.E.F)
- ทฤษฎีบท 3** กำหนดส่วนของเส้นตรงที่ยาวไม่เท่ากันสองเส้น สามารถตัดส่วนของเส้นตรงที่ยาวให้เท่ากับเส้นสั้น
- พิสูจน์** จะต้องแสดงว่า ส่วนของเส้นตรง AE ยาวเท่ากับ c
เพราะว่า A เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม โดยนิยาม D_{15} จึงได้ $AE = AD$
แต่จากที่สร้างได้ AD ให้ยาวเท่ากับ c
ดังนั้น โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1 จะได้ว่า ส่วนของเส้นตรง AE ยาวเท่ากับ c
- ช.ต.ส.** (quad erat facierdum; Q.E.F)

ทฤษฎีบท 4 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสองด้าน ด้านต่อด้านและมีมุมในระหว่างด้านเท่า เท่ากันแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะมีด้านและมีมุมที่เหลือเท่ากัน (รูปสามเหลี่ยมทั้งสองเท่ากันทุกประการ)

พิสูจน์ ยกูปสามเหลี่ยม ABC ทับรูปสามเหลี่ยม DEF
 โดยให้จุด A ทับจุด D และส่วนของเส้นตรง AB ทับส่วนของเส้นตรง DE
 เพราะว่า $AB = DE$ โดยสิ่งที่เห็นจริง A_4 ดังนั้น จุด B ทับจุด E
 เพราะว่า $\angle BAC = \angle EDF$ โดยสิ่งที่เห็นจริง A_4 ดังนั้น $\overline{AC}$ ทับ $\overline{DF}$
 เพราะว่า $AC = DF$ โดยสิ่งที่เห็นจริง A_4 ดังนั้น จุด C ทับจุด F
 และโดยสิ่งที่เห็นจริง A_4 จะได้ จุด B ทับจุด E และจุด C ทับจุด F
 ดังนั้น $\overline{BC}$ ทับ $\overline{EF}$ เพราะว่า ถ้า $\overline{BC}$ ไม่ทับ $\overline{EF}$ จะได้ว่าส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุด E และ F ปิดล้อมบริเวณ ซึ่งเป็นไปไม่ได้
 ดังนั้น $\overline{BC}$ ต้องทับ $\overline{EF}$
 จะได้รูปสามเหลี่ยม ABC ทับรูปสามเหลี่ยม DEF สนิท
 ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ และโดยสิ่งที่เห็นจริง A_4
 จะได้ $\hat{A}BC = \hat{D}EF$, $\hat{A}CB = \hat{D}FE$

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 5 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ย่อมมีมุมที่ฐานเท่ากัน และถ้าต่อด้านที่เท่ากันออกไปทางฐานจะได้อมุมที่ฐานเท่ากันด้วย

พิสูจน์ เพราะว่า $AF = AG$ และ $AB = AC$
 จากสิ่งที่กำหนดให้ และการสร้าง ได้ว่า $\hat{F}AC = \hat{G}AB$
 โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ $FC = GB$, $\hat{A}CF = \hat{A}BG$ และ $\hat{A}FC = \hat{A}GB$
 โดยสิ่งที่เห็นจริง A_3 ได้ $AF - AB = AG - AC$ ดังนั้น จะได้ $BF = CG$
 เนื่องจาก $BF = CG$ และ $FC = GB$ และ $\hat{B}FC = \hat{C}GB$
 โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ $\triangle BFC \cong \triangle CGB$
 จึงได้ $\hat{F}BC = \hat{C}GB$ และ $\hat{B}CF = \hat{C}BG$
 และโดยสิ่งที่เห็นจริง A_3 จะได้ $\hat{A}CF - \hat{B}CF = \hat{A}BG - \hat{C}BG$
 นั่นคือ $\hat{A}BC = \hat{A}CB$ จากที่ $\triangle BFC \cong \triangle CGB$ ดังนั้น $\hat{C}BF = \hat{B}CG$
 แต่ จุด F เป็นจุดบน $\overline{BD}$ และจุด G เป็นจุดบน $\overline{CE}$ นั่นคือ $\hat{C}BD = \hat{B}CE$

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 6 ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมเท่ากันสองมุมแล้ว ด้านตรงข้ามมุมที่เท่ากัน ย่อมเท่ากัน

พิสูจน์ ถ้า $AB > AC$

โดยทฤษฎีบท 3 สามารถตัด $\overline{AB}$ ที่จุด D โดยให้ $DB = AC$

โดยสัจพจน์ P_1 ลาก $\overline{DC}$

เนื่องจาก $DB = AC$ และ $BC = CB$ และ $\hat{D}BC = \hat{A}CB$ จะได้ $DC = AB$

และโดยทฤษฎีบท 4 จึงได้ $\triangle DBC \cong \triangle ACB$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะจะทำให้ส่วนรวมเท่ากับส่วนย่อยโดยขัดแย้งกับ

สิ่งที่เห็นจริง A_5 นั่นคือ เป็นไปไม่ได้ที่ $AB > AC$

ในทำนองเดียวกัน จะพิสูจน์ว่า $AB < AC$ เป็นไปไม่ได้เช่นกัน ดังนี้

ถ้า $AB < AC$ โดยทฤษฎีบท 3 สามารถตัด AC ที่จุด E โดยให้ $AB = CE$

โดยสัจพจน์ P_1 ลาก BE เนื่องจาก $AB = EC$ และ $BC = CB$

และ $\hat{A}BC = \hat{E}CB$ จะได้ $EB = AC$

และโดยทฤษฎีบท 4 จึงได้ $\triangle ECB \cong \triangle ABC$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะจะทำให้

ส่วนรวมเท่ากับส่วนย่อยโดยขัดแย้งกับ สิ่งที่เห็นจริง A_5

นั่นคือ เป็นไปไม่ได้ที่ $AB < AC$

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 7 ถ้าลากส่วนของเส้นตรง จากจุดปลายทั้งสองของเส้นตรงเส้นหนึ่งไปพบกัน ข้างหนึ่งของเส้นตรง จะไม่สามารถลากส่วนของเส้นตรงคู่อื่นใดจากจุดเดิม ตามลำดับให้เท่ากับส่วนของเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นตามลำดับโดยให้พบกัน ข้างเดียวกันนั้นได้อีก

พิสูจน์ สมมติว่ามีส่วนของเส้นตรง $AD = AC$ และส่วนของเส้นตรง $DB = CB$

โดยที่ $\overline{AD}$ และ $\overline{DB}$ พบกันที่จุด D ซึ่งจุด C และจุด D

อยู่ข้างเดียวกันของ $\overline{AB}$ เพราะว่าส่วนของเส้นตรง $AD = AC$

โดยทฤษฎีบท 5 จะได้ $\hat{A}CD = \hat{C}DA$

เพราะว่า $\hat{A}CD > \hat{D}CB$ และจากที่ $\hat{A}CD = \hat{C}DA$ จึงทำให้ $\hat{C}DA > \hat{D}CB$

โดยสิ่งที่เห็นจริง A_5 ได้ว่า $\hat{C}DB > \hat{C}DA$ และจากที่ $\hat{A}CD = \hat{C}DA$

จึงทำให้ $\hat{C}DB > \hat{A}CD$ และ $\hat{C}DB > \hat{D}CB$

เพราะว่าส่วนของเส้นตรง $DB = CB$ โดยทฤษฎีบท 5 จะได้ $\hat{C}DB = \hat{D}CB$

จึงทำให้เกิดการขัดแย้ง ดังนั้น ที่สมมติว่ามีส่วนของเส้นตรง $AD = AC$

และส่วนของเส้นตรง $DB = CB$ โดยที่ $\overline{AD}$ และ $\overline{DB}$ พบกันที่จุด D

ซึ่งจุด C และจุด D อยู่ข้างเดียวกันของ $\overline{AB}$ จึงเป็นไปไม่ได้

นั่นคือ ไม่สามารถลากส่วนของเส้นตรงจากจุดปลาย A และ B ให้ยาวเท่ากับ

$\overline{AC}$ และ $\overline{CB}$ ตามลำดับ ให้พบกันที่จุดนอก $\overline{AB}$ ที่อยู่ข้างเดียวกันกับ C ได้

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 8 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสองด้าน ด้านต่อด้าน และมีฐานเท่ากันแล้วรูปสามเหลี่ยมทั้งสอง จะมีมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านฐานเท่ากัน

พิสูจน์ ยกสามเหลี่ยม ABC ทับรูปสามเหลี่ยม DEF โดยให้จุด B ทับจุด E เนื่องจาก $BC = EF$ ดังนั้นจุด C ทับจุด F สมมติว่า $\overline{BA}$ ไม่ทับ $\overline{ED}$ และ $\overline{AC}$ ไม่ทับ $\overline{DF}$ จะเกิดรูปสามเหลี่ยม GEF ซึ่ง $EG = ED$ และ $GF = DF$ แสดงว่าที่จุด E กับ F สามารถลากส่วนของเส้นตรงให้ยาวเท่ากับที่กำหนดให้ไปพบกันทางด้านใดด้านหนึ่งของเส้นตรง EF มากกว่าหนึ่งคู่ จึงขัดแย้งกับ**ทฤษฎีบท 7** ดังนั้น ที่สมมติไว้ว่า $\overline{BA}$ ไม่ทับ $\overline{ED}$ และ $\overline{AC}$ ไม่ทับ $\overline{DF}$ ไม่เป็นจริง นั่นคือ $\overline{BA}$ ทับ $\overline{ED}$ และ $\overline{AC}$ ทับ $\overline{DF}$ จะได้ $\hat{BAC}$ ทับ $\hat{EDF}$ จึงได้ว่า $\hat{BAC} = \hat{EDF}$

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 9 การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้

พิสูจน์ พิจารณารูปสามเหลี่ยม ADF และ AEF จะได้ $AD = AE$, $DF = EF$ และเส้น AF เป็นฐานร่วม ดังนั้น $\hat{DAF} = \hat{EAF}$ โดย**ทฤษฎีบท 8** จะได้ว่า ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสองด้าน ด้านต่อด้าน และมีฐานเท่ากันแล้วรูปสามเหลี่ยมทั้งสอง จะมีมุมที่อยู่ตรงข้ามฐานเท่ากัน นั่นคือ $\overline{AF}$ จะได้เส้นแบ่งครึ่ง $\hat{BAC}$

ช.ต.ส. (quad erat facierdum; Q.E.F)

ทฤษฎีบท 10 สามารถแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

พิสูจน์ พิจารณารูปสามเหลี่ยม ADC และ BDC จะได้ $AC = BC$ $\overline{AC}$ เป็นด้านร่วม และ $\hat{ACD} = \hat{BCD}$ โดย**ทฤษฎีบท 4** จะได้ $AD = DB$ ดังนั้น จุด D เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$

ช.ต.ส. (quad erat facierdum; Q.E.F)

ทฤษฎีบท 11 สามารถลากเส้นมาตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้ ที่จุดกำหนดให้บนเส้นตรง

พิสูจน์ เพราะว่า $DC = EC$, $\overline{FC}$ เป็นด้านร่วม และ $DF = FE$ โดย**ทฤษฎีบท 8** จึงได้ $\hat{DCF} = \hat{ECF}$ และเป็นมุมฉาก ดังนั้น $\overline{FC}$ เป็นเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด C

ช.ต.ส. (quad erat facierdum; Q.E.F)

ทฤษฎีบท 12 สามารถลากเส้นจากจุดที่กำหนดให้ ไปตั้งฉากกับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งที่กำหนดให้
พิสูจน์ พิจารณารูปสามเหลี่ยม CGH และรูปสามเหลี่ยม CEH
 เพราะว่า $GH = HE$, $\overline{HC}$ เป็นด้านร่วม และ $CG = CE$
 โดยทฤษฎีบท 8 จึงได้ $\hat{CHG} = \hat{CHE}$ และเป็นมุมฉาก
 โดยนิยาม D_{10} จึงได้ว่า $\overline{CH}$ ตั้งฉากกับเส้นตรง AB
 ช.ต.ส. (quad erat faciendum; Q.E.F)

ทฤษฎีบท 13 เส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง จะได้มุมประชิดแต่ละมุมเป็นมุมฉาก
 หรือมุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก
พิสูจน์ ถ้า $\hat{CBA} = \hat{ABD}$ โดยนิยาม D_{10} จะได้ว่า $\hat{CBA} = \hat{ABD} = 1$ มุมฉาก
 ถ้า $\hat{CBA} \neq \hat{ABD}$ ลาก $\overline{EB}$ ตั้งฉากกับ $\overline{CD}$ ที่จุด B
 โดยทฤษฎีบท 11 จะได้ $\hat{EBD}$, $\hat{EBC}$ เป็นมุมฉาก
 แต่ $\hat{EBC} = \hat{EBA} + \hat{ABC}$ โดยสิ่งที่เห็นจริง A_2 นำ $\hat{DBE}$ เพิ่มเข้าทั้งสองข้าง
 จะได้ $\hat{DBE} + \hat{EBC} = \hat{DBE} + \hat{EBA} + \hat{ABC}$
 เพราะว่า $\hat{DBE} + \hat{EBA} = \hat{DBA}$
 โดยสิ่งที่เห็นจริง A_2 นำ $\hat{ABC}$ เพิ่มเข้าทั้งสองข้าง
 จะได้ว่า $\hat{ABC} + \hat{DBE} + \hat{EBA} = \hat{ABC} + \hat{DBA}$
 โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1 จึงได้ $\hat{DBE} + \hat{EBC} = \hat{DBA} + \hat{ABC}$
 แต่ $\hat{DBE} + \hat{EBC} = 2$ มุมฉาก
 โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1 จึงได้ $\hat{DBA} + \hat{ABC} = 2$ มุมฉาก
 ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 14 ที่จุดหนึ่งบนเส้นตรง ถ้ามีเส้นตรงสองเส้นที่ลากจากจุดจุดนั้น แต่อยู่คนละ
 ข้างทำให้เกิดมุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉากแล้ว เส้นตรงทั้งสองจะ
 ต่อเป็นเส้นตรงเดียวกัน
พิสูจน์ สมมติว่า $\overline{BD}$ ไม่เป็นเส้นตรงเดียวกันกับ $\overline{BC}$
 ให้ $\overline{BE}$ เป็นเส้นตรงเดียวกันกับ $\overline{BC}$
 โดยทฤษฎีบท 13 จะได้ว่า $\hat{ABC} + \hat{ABE} = 2$ มุมฉาก
 แต่ $\hat{ABC} + \hat{ABD} = 2$ มุมฉาก โดยสัจพจน์ P_4 และสิ่งที่เห็นจริง A_1 จะได้ว่า
 $\hat{ABC} + \hat{ABE} = \hat{ABC} + \hat{ABD}$ โดยสิ่งที่เห็นจริง A_3
 จะได้ว่า $\hat{ABE} = \hat{ABD}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากขัดแย้งกับสิ่งที่เห็นจริง A_5
 ที่ส่วนรวมจะเท่ากับส่วนย่อย ดังนั้น ที่สมมติว่า $\overline{BD}$ ไม่เป็นเส้นตรงเดียวกัน
 กับ $\overline{BC}$ จึงไม่เป็นจริง นั่นคือ $\overline{BD}$ เป็นเส้นตรงเดียวกันกับ $\overline{BC}$
 ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 15 เส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน

พิสูจน์

พิจารณา เส้นตรง DE ตั้งอยู่บนเส้นตรง AB

โดยทฤษฎีบท 13 จะได้ $\hat{AED} + \hat{DEB} = 2$ มุมฉาก

เส้นตรง AE ตั้งอยู่บนเส้นตรง CD โดยทฤษฎีบท 13

จะได้ $\hat{AEC} + \hat{AED} = 2$ มุมฉาก จากสิ่งที่เห็นจริง A_1

จะได้ว่า $\hat{AED} + \hat{DEB} = \hat{AEC} + \hat{AED}$

โดยสิ่งที่เห็นจริง A_2 นำเอา $\hat{AED}$ ออกจากสิ่งที่เท่ากัน แล้ว ส่วนที่เหลือย่อมเท่ากัน ดังนั้น $\hat{DEB} = \hat{AEC}$ ในทำนองเดียวกันจะสามารถแสดงได้ว่า

$\hat{DEA} = \hat{CEB}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 13 จะได้ $\hat{DEA} + \hat{AEC} = 2$ มุมฉาก

เส้นตรง CE ตั้งอยู่บนเส้นตรง AB โดยทฤษฎีบท 13

จะได้ $\hat{CEB} + \hat{AEC} = 2$ มุมฉาก

จากสิ่งที่เห็นจริง A_1 จะได้ว่า $\hat{DEA} + \hat{AEC} = \hat{CEB} + \hat{AEC}$

โดยสิ่งที่เห็นจริง A_2 นำเอา $\hat{AEC}$ ออกจากสิ่งที่เท่ากัน

แล้ว ส่วนที่เหลือย่อมเท่ากัน ดังนั้น $\hat{DEA} = \hat{CEB}$

ช.ต.พ.

(quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 16 ถ้าต่อต้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะโตกว่ามุมภายในที่อยู่ตรงข้าม

พิสูจน์

โดยทฤษฎีบท 10 สามารถแบ่งครึ่ง $\overline{AC}$ ที่จุด E

โดยทฤษฎีบท 3 ลาก $\overline{BE}$ ต่อไปจนถึงจุด F โดยให้ $BE = EF$

จากสัจพจน์ P_1 สามารถลาก $\overline{FC}$ และจากสัจพจน์ P_2 สามารถต่อ $\overline{AC}$

ไปที่จุด G เพราะว่า $AE = EC$, $EB = EF$ และโดยทฤษฎีบท 15

จะได้ว่า $\hat{AEB} = \hat{FEC}$ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $\triangle AEB \cong \triangle FEC$

ดังนั้น จะได้ $\hat{BAE} = \hat{ECF}$ จากสิ่งที่เห็นจริง A_5 จะได้ว่า $\hat{ACD} > \hat{ECF}$

ดังนั้น $\hat{ACD} > \hat{BAE}$ เพราะว่า $\hat{BAE} = \hat{BAC}$ นั่นคือ $\hat{ACD} > \hat{BAC}$

ในทำนองเดียวกันจะสามารถแสดงได้ว่า $\hat{ACD} > \hat{CBA}$ ดังนี้

โดยทฤษฎีบท 10 สามารถแบ่งครึ่ง $\overline{BC}$ ที่จุด H

โดยทฤษฎีบท 3 ลาก $\overline{AH}$ ต่อไปจนถึงจุด K โดยให้ $AH = HK$

จากสัจพจน์ P_1 สามารถลาก $\overline{KC}$ เพราะว่า $AH = HK$, $BH = HC$

และโดยทฤษฎีบท 15 จะได้ว่า $\hat{AHB} = \hat{KHC}$

โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $\triangle AHB \cong \triangle KHC$ ดังนั้น จะได้ $\hat{HBA} = \hat{HCK}$

จากสิ่งที่เห็นจริง A_5 จะได้ว่า $\hat{GCH} > \hat{HCK}$

ดังนั้น $\hat{GCH} > \hat{HBA}$ เพราะว่า $\hat{HBA} = \hat{CBA}$ จึงได้ว่า $\hat{GCH} > \hat{CBA}$

จากและโดยทฤษฎีบท 15 จะได้ว่า $\hat{GCH} = \hat{ACD}$ นั่นคือ $\hat{ACD} > \hat{CBA}$

ช.ต.พ.

(quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 17 ผลบวกของมุมภายในสองมุมของรูปสามเหลี่ยม ย่อมน้อยกว่าสองมุมฉาก
พิสูจน์ จะแสดงว่า 1) $\hat{A}CB + \hat{B}AC < 2$ มุมฉาก โดยสัจพจน์ P_2 ต่อ $\overline{BC}$ ไปที่จุด D
 โดยทฤษฎีบท 16 จะได้ว่า $\hat{A}CD > \hat{B}AC$
 ดังนั้น $\hat{A}CB + \hat{A}CD > \hat{A}CB + \hat{B}AC$ แต่ $\hat{A}CB + \hat{A}CD = 2$ มุมฉาก
 นั่นคือ $\hat{A}CB + \hat{B}AC < 2$ มุมฉาก
 ต่อไปจะแสดงว่า 2) $\hat{B}AC + \hat{A}CB < 2$ มุมฉาก
 โดยสัจพจน์ P_2 ต่อ $\overline{AC}$ ไปที่จุด G โดยทฤษฎีบท 16
 จะได้ว่า $\hat{G}CB > \hat{B}AC$ ดังนั้น $\hat{G}CB + \hat{A}CB > \hat{B}AC + \hat{A}CB$
 แต่ $\hat{G}CB + \hat{A}CB = 2$ มุมฉาก นั่นคือ $\hat{B}AC + \hat{A}CB < 2$ มุมฉาก
 ต่อไปจะแสดงว่า 3) $\hat{B}AC + \hat{C}BA < 2$ มุมฉาก
 โดยสัจพจน์ P_2 ต่อ $\overline{AB}$ ไปที่จุด H โดยทฤษฎีบท 16
 จะได้ว่า $\hat{H}BC > \hat{B}AC$ ดังนั้น $\hat{H}BC + \hat{C}BA > \hat{B}AC + \hat{C}BA$
 แต่ $\hat{H}BC + \hat{C}BA = 2$ มุมฉาก
 นั่นคือ $\hat{B}AC + \hat{C}BA < 2$ มุมฉาก
ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 18 รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ด้านที่ยาวย่อมอยู่ตรงข้ามมุมที่ใหญ่กว่า
พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 3 ดัด $\overline{AC}$ ที่จุด D
 โดยสัจพจน์ P_2 ลาก $\overline{BD}$ โดยทำให้ $AD = AB$
 โดยทฤษฎีบท 16 จะได้ว่า $\hat{A}DB > \hat{D}CB$
 เพราะว่า รูปสามเหลี่ยม ABD มี $AD = AB$
 โดยทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า $\hat{A}DB = \hat{A}BD$
 ดังนั้น $\hat{A}BD > \hat{D}CB$ จึงได้ว่า $\hat{A}BD + \hat{D}BC > \hat{D}CB$
 แต่ $\hat{A}BD + \hat{D}BC = \hat{A}BC$ และ $\hat{D}CB = \hat{A}CB$
 นั่นคือ $\hat{A}BD > \hat{A}CB$
ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 19 รูปสามเหลี่ยมใด ๆ มุมที่ใหญ่กว่าย่อมอยู่ตรงข้ามด้านที่ยาวกว่า
พิสูจน์ ถ้า $AC = AB$ โดยทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า $\hat{A}BC = \hat{A}CB$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้
 เพราะขัดกับสิ่งที่กำหนดให้ว่ารูปสามเหลี่ยม ABC มี $\hat{A}BC > \hat{A}CB$
 ดังนั้น ถ้า โดยทฤษฎีบท 18 จะได้ว่า $\hat{A}BC < \hat{A}CB$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้
 เพราะขัดกับสิ่งที่กำหนดให้ว่ารูปสามเหลี่ยม ABC มี $\hat{A}BC > \hat{A}CB$
 ดังนั้น $AC < AB$ ไม่เป็นจริง
 นั่นคือ $AC > AB$
ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 20 รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ความยาวของด้านสองด้านรวมกันย่อมยาวกว่าด้านที่สาม
พิสูจน์

จะแสดงว่า 1) $BA + AC > BC$

โดยสัจพจน์ P_2 ต่อ $\overline{AB}$ ทางจุด A ไปยังจุด D ทำให้ได้ $AD = AC$

โดยสัจพจน์ P_1 ลาก $\overline{DC}$ โดยทฤษฎีบท 5 จะได้ $\hat{ACD} = \hat{ADC}$

โดยสิ่งที่เห็นจริง A_5 จะได้ว่า $\hat{BCD} > \hat{ACD}$ ดังนั้น $\hat{BCD} > \hat{ADC}$

โดยทฤษฎีบท 19 จะได้ $DB > BC$ แต่ $DB = BA + AD$

และ $AD = AC$ ดังนั้น $DB = BA + AC$ นั่นคือ $BA + AC > BC$

จะแสดงว่า 2) $AB + BC > AC$

โดยสัจพจน์ P_2 ต่อ $\overline{AB}$ ทางจุด B ไปยังจุด E ทำให้ได้ $BE = BC$

โดยสัจพจน์ P_1 ลาก $\overline{EC}$ โดยทฤษฎีบท 5 จะได้ $\hat{BCE} = \hat{BEC}$

โดยสิ่งที่เห็นจริง A_5 จะได้ว่า $\hat{ACE} > \hat{BCE}$ ดังนั้น $\hat{ACE} > \hat{BEC}$

โดยทฤษฎีบท 19 จะได้ $EA > AC$ แต่ $EA = AB + BE$ และ $BE = BC$

ดังนั้น $EA = AB + BC$ นั่นคือ $AB + BC > AC$

จะแสดงว่า 3) $AC + CB > AB$

โดยสัจพจน์ P_2 ต่อ $\overline{AC}$ ทางจุด C ไปยังจุด F ทำให้ได้ $CB = CF$

โดยสัจพจน์ P_1 ลาก $\overline{FB}$ โดยทฤษฎีบท 5 จะได้ $\hat{CBF} = \hat{CFB}$

โดยสิ่งที่เห็นจริง A_5 จะได้ว่า ดังนั้น $\hat{ABF} > \hat{CFB}$

โดยทฤษฎีบท 19 จะได้ $AF > AB$ แต่ $AF = AC + CF$ และ $CF = CB$

ดังนั้น $AF = AC + CB$ นั่นคือ $AC + CB > AB$

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 21 บนด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม ถ้าสร้างเส้นตรงสองเส้นบนปลายทั้งสองด้านนี้ไปตัดกันภายในรูปสามเหลี่ยม จะได้ว่าส่วนของเส้นตรงซึ่งทั้งสองดังกล่าวรวมกันย่อมสั้นกว่าผลบวกของด้านทั้งสองที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม แต่มุมที่ประกอบด้านทั้งสองจะโตกว่ามุมที่ประกอบด้วยด้านสองด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม

พิสูจน์ โดยสัจพจน์ P_2 สามารถต่อ $\overline{BD}$ ไปตัด $\overline{AC}$ ที่ E โดยสัจพจน์ P_1 ลาก $\overline{CD}$

โดยทฤษฎีบท 20 จะได้ว่า $\triangle ABE$ มี $AB + AE > BE$

โดยสิ่งที่เห็นจริง A_2 นำ EC เพิ่มเข้าทั้งสองข้าง

จะได้ $AB + AE + EC > BE + EC$ แต่ $AE + EC = AC$

จะได้ $AB + AC > BE + EC$ โดยทฤษฎีบท 20 จะได้ว่า $\triangle CED$

มี $DE + EC > CD$ โดยสิ่งที่เห็นจริง A_2 นำ BD เพิ่มเข้าทั้งสองข้าง

จะได้ $BD + DE + EC > BD + CD$ แต่ $BD + DE = BE$

จะได้ $BE + EC > BD + CD$ ดังนั้น $AB + AC > BE + EC > BD + CD$

นั่นคือ $BD + CD < AB + AC$ โดยทฤษฎีบท 16 จะได้ว่า $\triangle CED$

มี $\hat{BDC} > \hat{DEC}$ และโดยทฤษฎีบท 16 จะได้ว่า $\triangle ABE$ มี $\hat{BEC} > \hat{BAE}$
 แต่ $\hat{BEC} = \hat{DEC}$ ดังนั้น $\hat{BDC} > \hat{BAE}$ แต่ $\hat{BAE} = \hat{BAC}$
 ดังนั้น $\hat{BDC} > \hat{BAC}$

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 22 สามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีด้านยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้
 สามเส้น โดยเส้นทั้งสามที่กำหนดให้นั้นมีผลรวมความยาวของเส้นใด ๆ
 ยาวกว่าเส้นที่สาม

พิสูจน์ สมมติว่า $\overline{BC}$ ไม่ตัด $\overline{CA}$ ที่จุด C
 ให้จุด D เป็นจุดปลายของ $\overline{BD}$ ซึ่งลากต่อจากจุดปลายของ $\overline{AB}$ ที่จุด B
 และ จุด C และจุด B อยู่ข้างเดียวกันของ $\overline{AB}$
 โดยสัจพจน์ P_1 และทฤษฎีบท 2 สามารถลากส่วนของเส้นตรง
 ซึ่งทำให้ $\overline{AC} = \overline{AD}$ และ $\overline{CB} = \overline{DB}$
 โดยทฤษฎีบท 20 จะได้ว่า $\triangle ABC$ มี $AC + CB > AB$
 และ $\triangle ABD$ มี $AD + DB > AB$
 โดยทฤษฎีบท 7 ถ้าลากส่วนของเส้นตรง จากจุดปลายทั้งสองของเส้นตรง
 เส้นหนึ่งไปพบกันข้างหนึ่งของเส้นตรงจะไม่สามารถลากส่วนของเส้นตรงคู่อื่น
 ใดจากจุดเดิมตามลำดับให้เท่ากับส่วนของเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นตามลำดับ
 โดยให้พบกันข้างเดียวกันนั้นได้อีก ดังนั้น $AC + CB = AD + DB$
 จึงได้ว่าจุด C และ D เป็นจุดเดียวกัน
 ดังนั้น ที่สมมติว่า $\overline{BC}$ ไม่ตัด $\overline{CA}$ ที่จุด C จึงไม่เป็นจริง
 นั่นคือ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม
 ในทำนองเดียวกันจะสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC
 จากฐาน $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$ ได้

ช.ต.ส. (quad erat faciendum; Q.E.F)

ทฤษฎีบท 23 สามารถสร้างมุมบนส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ ณ จุดที่กำหนดให้ ให้
 เท่ากับมุมที่กำหนดให้

พิสูจน์ ให้ C เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง AB และ D เป็นจุดซึ่งไม่อยู่บนส่วนของเส้นตรง AB
 โดยทฤษฎีบท 2 ลาก $\overline{CD} = \overline{OM}$ และ $\overline{DE}$ ไปตัด $\overline{AB}$ ที่ E
 โดยที่ $\overline{DE} = \overline{MN}$ โดยสัจพจน์ P_1 ลาก $\overline{NM}$ จะได้ $\triangle MON$
 โดยทฤษฎีบท 22 จะได้ $CD + DE > CE$
 และได้รูปสามเหลี่ยม DCE ยกรูป $\triangle MON$ ทับรูป $\triangle DCE$
 โดยที่ $\overline{ON}$ ทับกับ $\overline{CE}$ สมมติว่า จุด M ไม่ทับจุด D
 จะได้ว่ามีจุด M และ D อยู่บนข้างเดียวกันของเส้น AB
 ซึ่งทำให้ $OM + MN > AB$ และ $CD + DE > AB$

แต่ $\overline{CD} = \overline{OM}$ และ $\overline{DE} = \overline{MN}$ ดังนั้น $OM + MN = CD + DE$
 และโดยทฤษฎีบท 7 ถ้าลากส่วนของเส้นตรง จากจุดปลายทั้งสอง
 ของเส้นตรงเส้นหนึ่งไปพบกันข้างหนึ่งของเส้นตรงจะไม่สามารถลาก
 ส่วนของเส้นตรงคู่อื่นใดจากจุดเดิมตามลำดับให้เท่ากับส่วนของเส้นตรงทั้งสอง
 เส้นนั้นตามลำดับโดยให้พบกันข้างเดียวกันนั้นได้อีก
 นั่นคือ ที่สมมติว่า จุด M ไม่ทับจุด D จึงไม่เป็นจริง
 ดังนั้น จุด M ทับจุด D จะได้ $\triangle MON$ เท่ากันทุกประการกับ $\triangle DCE$
 จึงได้ $\widehat{DCE} = \widehat{MON}$ แต่ $\widehat{DCE} = \widehat{DCB}$ ดังนั้น $\widehat{DCB} = \widehat{MON}$

ช.ต.ส. (quad erat faciendum; Q.E.F)

ทฤษฎีบท 24 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสองด้าน ด้านต่อด้าน แต่มุมใน
 ระหว่างด้านเท่าไม่เท่ากัน แล้วฐานที่อยู่ตรงข้ามมุมใหญ่จะยาวกว่าฐานที่
 อยู่ตรงข้ามมุมที่เล็กกว่า

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 23 สามารถสร้าง $\overline{EDG}$ บน $\overline{DE}$ ที่จุด D ให้เท่ากับ $\widehat{BAC}$
 และให้ $DG = AC = DF$ ลาก $\overline{EG}$ และ $\overline{GF}$ เพราะว่า $AB = DE$
 และ $AC = DG$ และ $\widehat{BAC} = \widehat{EDG}$ โดยทฤษฎีบท 4
 จึงได้ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEG$ ดังนั้น $BC = EG$ เพราะว่า $DF = DG$
 โดยทฤษฎีบท 5 จะได้ $\widehat{DGF} = \widehat{DFG}$ เพราะว่า $\widehat{EDG} > \widehat{EDF}$
 โดยทฤษฎีบท 19 จะได้ $EG > EF$ แต่ $BC = EG$ ดังนั้น $BC > EF$

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 25 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน ด้านต่อด้าน และฐานของรูป
 หนึ่งยาวกว่าฐานของอีกรูปหนึ่ง จะทำให้มุมที่อยู่ตรงข้ามฐานที่ยาวกว่าโตกว่ามุม
 ที่อยู่ตรงข้ามกับฐานที่สั้นกว่า

พิสูจน์ ตัด $\overline{BC}$ ที่จุด G ทำให้ $GB = EF$ ลาก $\overline{AG}$
 โดยสิ่งที่เห็นจริง A_5 จะได้ว่า $\widehat{BAC} > \widehat{BAG}$ ดังนั้น $\triangle ABG$ และ $\triangle DEF$
 มี $AB = DE$ และ $GB = EF$ สมมติว่า $AG \neq DF$ ให้ $AG < DF$
 โดยทฤษฎีบท 22 สามารถสร้าง $\triangle EDH$ บน $\overline{DE}$ ให้ $DH = AG$,
 $HE = GB$ และฐาน $AB = DE$ โดยทฤษฎีบท 8 จะได้ว่า $\widehat{AGB} = \widehat{EHD}$
 โดยทฤษฎีบท 16 จะได้ว่า $\widehat{EHD} > \widehat{EFD}$ ดังนั้น $\widehat{AGB} > \widehat{EFD}$
 โดยทฤษฎีบท 19 จึงได้ว่า $AB > DE$ ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้ $AB = DE$
 ทำนองเดียวกัน ถ้า $AG > DF$ ก็จะไม่เป็นจริงเช่นเดียวกัน
 ดังนั้น ที่สมมติว่า $AG \neq DF$ จึงเป็นไปได้ นั่นคือ $\triangle ABG$ และ $\triangle DEF$
 มีด้าน $AB = DE$, $AG = DF$ และมีฐาน $GB = EF$ จากทฤษฎีบท 8
 จึงได้ว่า $\widehat{FDE} = \widehat{BAG}$ แต่ $\widehat{BAC} > \widehat{BAG}$ ดังนั้น $\widehat{BAC} > \widehat{FDE}$

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 26 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมเท่ากันสองมุม มุมต่อมุม และมีด้าน ๆ หนึ่งยาวเท่ากัน แล้วด้านที่เหลือย่อมยาวเท่ากัน ด้านต่อด้าน และมุมที่เหลือจะเท่ากัน

พิสูจน์

กรณี 1) กำหนดให้ $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{D}\hat{E}\hat{F}$ และ $\hat{A}\hat{C}\hat{B} = \hat{D}\hat{F}\hat{E}$ และ $BC = EF$

สมมติว่า $AB \neq DE$ ดังนั้น จะต้องมียาวด้านใดด้านหนึ่งยาวกว่า

ให้ $AB > DE$ สามารถตัด AB ที่จุด G ให้ $BG = ED$

ลาก GC โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $\triangle GBC \cong \triangle DEF$

ดังนั้น $\hat{G}\hat{C}\hat{B} = \hat{D}\hat{F}\hat{E}$ แต่ $\hat{D}\hat{F}\hat{E} = \hat{A}\hat{C}\hat{B}$ นั่นคือ $\hat{G}\hat{C}\hat{B} = \hat{A}\hat{C}\hat{B}$

ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งที่เห็นจริง A_5 “ส่วนรวมย่อมใหญ่กว่าส่วนย่อย”

ทำนองเดียวกัน ถ้า $AB < DE$ ก็สามารถแสดงได้ว่าไม่เป็นจริงเช่นเดียวกัน

ทำให้ที่สมมติว่า $AB \neq DE$ จึงเป็นไปได้

ดังนั้น $AB = DE$, $BC = EF$ และ $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{D}\hat{E}\hat{F}$

โดยทฤษฎีบท 4 จึงสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ

ดังนั้น ด้านที่เหลือและมุมที่เหลือเท่ากัน

กรณี 2) กำหนดให้ $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{D}\hat{E}\hat{F}$ และ $\hat{A}\hat{C}\hat{B} = \hat{D}\hat{F}\hat{E}$ และ $AB = DE$

สมมติว่า $BC \neq EF$ ดังนั้น จะต้องมียาวด้านใดด้านหนึ่งยาวกว่า

ให้ $BC > EF$ สามารถตัด BC ที่จุด H ให้ $BH = EF$

ลาก AH โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $\triangle ABH \cong \triangle DEF$

ดังนั้น $\hat{A}\hat{H}\hat{B} = \hat{D}\hat{F}\hat{E}$ แต่ $\hat{D}\hat{F}\hat{E} = \hat{A}\hat{C}\hat{B}$ นั่นคือ $\hat{A}\hat{H}\hat{B} = \hat{A}\hat{C}\hat{B}$

ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 16 “มุมภายนอกย่อมโตกว่ามุมภายในที่อยู่ตรงข้าม”

ทำนองเดียวกัน ถ้า $BC < EF$ ก็สามารถแสดงได้ว่าไม่เป็นจริงเช่นเดียวกัน

ทำให้ที่สมมติว่า $BC \neq EF$ จึงเป็นไปได้

ดังนั้น $BC = EF$, $AB = DE$ และ $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{D}\hat{E}\hat{F}$

โดยทฤษฎีบท 4 จึงสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ

ดังนั้น ด้านที่เหลือและมุมที่เหลือเท่ากัน

กรณี 3) กำหนดให้ $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{D}\hat{E}\hat{F}$ และ $\hat{A}\hat{C}\hat{B} = \hat{D}\hat{F}\hat{E}$ และ $AC = DF$

สมมติว่า $BC \neq EF$ ดังนั้น จะต้องมียาวด้านใดด้านหนึ่งยาวกว่า

ให้ $BC > EF$ สามารถตัด BC ที่จุด O ให้ $BO = EF$

ลาก AO โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $\triangle ABO \cong \triangle DEF$

ดังนั้น $\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \hat{D}\hat{F}\hat{E}$ แต่ $\hat{D}\hat{F}\hat{E} = \hat{A}\hat{C}\hat{B}$ นั่นคือ $\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \hat{A}\hat{C}\hat{B}$

ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 16 “มุมภายนอกย่อมโตกว่ามุมภายในที่อยู่ตรงข้าม”

ทำนองเดียวกัน ถ้า $BC < EF$ ก็สามารถแสดงได้ว่าไม่เป็นจริงเช่นเดียวกัน

ทำให้ที่สมมติว่า $BC \neq EF$ จึงเป็นไปได้

ดังนั้น $BC = EF$, $AC = DF$ และ $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{D}\hat{E}\hat{F}$

โดยทฤษฎีบท 4 จึงสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ

ดังนั้น ด้านที่เหลือและมุมที่เหลือเท่ากัน

ช.ต.พ.

(quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 27 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดกับเส้นตรงสองเส้นทำให้มุมแย้งเท่ากันแล้ว
เส้นตรงทั้งสองจะขนานกัน

พิสูจน์ ถ้าเส้นตรง AB ไม่ขนานกับ เส้นตรง CD แล้วต่อเส้นตรง AB
และเส้นตรง CD ออกไปทั้งสองข้าง จะต้องไปพบกันข้างใดข้างหนึ่ง
สมมติว่า ต่อเส้นตรง AB และ เส้นตรง CD พบกันทาง จุด B
และ จุด D โดยไปพบกันที่จุด T จะได้ $\triangle ETF$ โดย**ทฤษฎีบท 16**
จะได้ว่า มุมภายนอกย่อมโตกว่ามุมภายในที่อยู่ตรงข้าม
นั่นคือ จะได้ $\hat{A}EF > \hat{E}FD$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $\hat{A}EF = \hat{E}FD$
ดังนั้น ที่สมมติว่าต่อเส้นตรง AB และเส้นตรง CD พบกันทางจุด B
และจุด D โดยไปพบกันที่จุด T จึงเป็นไม่ได้
สมมติว่า ต่อเส้นตรง AB และ เส้นตรง CD พบกันทาง จุด A
และจุด C โดยไปพบกันที่จุด R จะได้ $\triangle ERF$ โดย**ทฤษฎีบท 16**
จะได้ว่า มุมภายนอกย่อมโตกว่ามุมภายในที่อยู่ตรงข้าม
นั่นคือ จะได้ $\hat{E}FD > \hat{A}EF$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $\hat{A}EF = \hat{E}FD$
ดังนั้น ที่สมมติว่าต่อเส้นตรง AB และเส้นตรง CD พบกันทางจุด A
และจุด C โดยไปพบกันที่จุด R จึงเป็นไม่ได้
ดังนั้น เส้นตรง AB ขนานกับ เส้นตรง CD

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 28 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดกับเส้นตรงสองเส้นทำให้มุมภายนอกเท่ากับมุม
ภายใน ซึ่งอยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัด หรือมุมภายในข้างเดียวกันของเส้น
ตัดรวมกันเท่ากับสองมุมฉากแล้ว เส้นตรงทั้งสองจะขนานกัน

พิสูจน์ **กรณี 1)** จากสิ่งที่กำหนดให้ได้ว่า $\hat{E}GB = \hat{G}HD$
แต่จาก**ทฤษฎีบท 15** จะได้ว่า มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน นั่นคือ $\hat{E}GB = \hat{A}GH$
โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1 จึงทำให้ $\hat{G}HD = \hat{A}GH$
และโดย**ทฤษฎีบท 27** จึงได้ว่า เส้นตรง AB ขนานกับเส้นตรง CD
กรณี 2) จากสิ่งที่กำหนดให้ได้ว่า $\hat{B}GH + \hat{G}HD$ เท่ากับ สองมุมฉาก
แต่จาก**ทฤษฎีบท 13** จะได้ว่า $\hat{B}GH + \hat{A}GH$ เท่ากับสองมุมฉาก
โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1 จึงทำให้ $\hat{B}GH + \hat{G}HD = \hat{B}GH + \hat{A}GH$
โดยสิ่งที่เห็นจริง A_3 จึงทำให้ $\hat{G}HD = \hat{A}GH$
โดย**ทฤษฎีบท 27** จึงได้ว่า เส้นตรง AB ขนานกับเส้นตรง CD
ดังนั้น เส้นตรง AB ขนานกับเส้นตรง CD

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 29 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดกับเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกันแล้ว จะทำให้มุมแย้งเท่ากัน มุมภายนอกเท่ากับมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด

และมุมภายในซึ่งอยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก

พิสูจน์

1) สมมติว่า $\hat{AGH} \neq \hat{GHD}$ จะได้ว่ามีมุมใดมุมหนึ่งที่โตกว่า

ให้ $\hat{AGH} > \hat{GHD}$ นำ $\hat{BGH}$ บวกเข้าทั้งสองข้างจะได้

$$\hat{AGH} + \hat{BGH} > \hat{GHD} + \hat{BGH}$$

แต่โดยทฤษฎีบท 13 จะได้ $\hat{AGH} + \hat{BGH}$ เท่ากับสองมุมฉาก

ดังนั้น $\hat{GHD} + \hat{BGH}$ น้อยกว่าสองมุมฉาก

โดยสัจพจน์ P_5 เมื่อต่อเส้นตรง AB และเส้นตรง CD ออกไปจะพบกัน

ทางด้าน B และ D จึงเกิดการขัดแย้งกับที่กำหนดให้

เส้นตรง AB ขนานกับเส้นตรง CD

ที่สมมติว่า $\hat{AGH} \neq \hat{GHD}$ จึงเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $\hat{AGH} = \hat{GHD}$

2) จาก $\hat{AGH} = \hat{GHD}$ และ เส้นตรง AB ขนานกับเส้นตรง CD

โดยทฤษฎีบท 15 จะได้ว่า $\hat{AGH} = \hat{EGB}$ โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1

จึงทำให้ $\hat{EGB} = \hat{GHD}$

3) จาก $\hat{EGB} = \hat{GHD}$ นำ $\hat{BGH}$ บวกเข้าทั้งสองข้าง

โดยสิ่งที่เห็นจริง A_2 จึงทำให้ $\hat{EGB} + \hat{BGH} = \hat{GHD} + \hat{BGH}$

แต่โดยทฤษฎีบท 13 จะได้ $\hat{EGB} + \hat{BGH}$ เท่ากับสองมุมฉาก

ดังนั้น $\hat{BGH} + \hat{GHD}$ เท่ากับสองมุมฉาก

ช.ต.พ.

(quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 30 เส้นตรงทั้งหลายที่ต่างก็ขนานกับเส้นตรงเดียวกันย่อมขนานกัน

พิสูจน์

เพราะว่า $AB \parallel CD$ โดยทฤษฎีบท 29 จะได้ว่า $\hat{MLA} = \hat{LOC}$

และโดยทฤษฎีบท 15 ได้ว่า $\hat{LOC} = \hat{DOP}$ โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1

จึงทำให้ $\hat{MLA} = \hat{DOP}$ เพราะว่ $CD \parallel EF$ โดยทฤษฎีบท 29

จะได้ว่า $\hat{DOP} = \hat{FPN}$ โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1 จึงทำให้ $\hat{MLA} = \hat{FPN}$

และโดยทฤษฎีบท 15 ได้ว่า $\hat{FPN} = \hat{OPE}$ โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1

จึงทำให้ $\hat{MLA} = \hat{OPE}$ โดยทฤษฎีบท 28 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดกับเส้นตรง

สองเส้น ทำให้มุมภายนอกเท่ากับมุมภายใน ซึ่งอยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัด

แล้ว เส้นตรงทั้งสองจะขนานกัน ดังนั้น $AB \parallel EF$

ช.ต.พ.

(quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 31 จงลากเส้นตรงผ่านจุดที่กำหนดให้และให้ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้
พิสูจน์ สมมติว่า AB ไม่ขนานกับ CD ต่อเส้นตรง AB และ เส้นตรง CD ออกไป
 ทั้งสองข้างจะต้องไปพบกันข้างใดข้างหนึ่งสมมติว่า ต่อเส้นตรง AB
 และเส้นตรง CD พบกันทาง จุด A และ จุด C โดยไปพบกันที่จุด R
 จะได้ $\triangle ERF$ โดย**ทฤษฎีบท 16** จะได้ว่า มุมภายนอกย่อมโตกว่ามุมภายในที่
 อยู่ตรงข้าม นั่นคือ จะได้ $\angle EFD > \angle AEF$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้
 $\angle AEF = \angle EFD$ เท่ากับมุมฉาก ดังนั้น ที่สมมติว่าต่อเส้นตรง AB
 และเส้นตรง CD พบกันทางจุด A และจุด C
 โดยไปพบกันที่จุด R จึงเป็นไม่ได้ ดังนั้น เส้นตรง AB ขนานกับ เส้นตรง CD
ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 32 รูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งออกไป มุมภายนอกจะเท่ากับ
 ผลรวมของมุมภายในสองมุมที่อยู่ตรงข้าม และมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม
 รวมกันจะเท่ากับสองมุมฉาก
พิสูจน์ โดย**ทฤษฎีบท 31** สามารถลาก CE ให้ขนานกับ AB
 โดย**ทฤษฎีบท 29** จะได้มุมแย้งเท่ากัน และมุมภายนอกกับมุมภายในข้างเดียวกัน
 ของเส้นตัดเท่ากัน นั่นคือ $\angle CAB = \angle ACE$ และ $\angle ABC = \angle ECD$
 ดังนั้น $\angle CAB + \angle ABC = \angle ACE + \angle ECD$ แต่ $\angle ACE + \angle ECD = \angle ACD$
 โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1 จะได้ $\angle ACD = \angle CAB + \angle ABC$
 เมื่อนำ $\angle BCA$ บวกเข้าทั้งสองข้างของ $\angle CAB + \angle ABC = \angle ACD$
 จะได้ $\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = \angle ACD + \angle BCA$
 โดย**ทฤษฎีบท 13** จะได้ว่า $\angle ACD + \angle BCA$ เท่ากับสองมุมฉาก
 ดังนั้น $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB$ เท่ากับสองมุมฉาก
ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 33 ถ้าลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดปลายข้างเดียวกันของส่วนของเส้นตรง
 สองเส้นที่ยาวเท่ากัน และ ขนานกันแล้ว เส้นเชื่อมนั้นจะยาวเท่ากัน
 และขนานกันด้วย

พิสูจน์ จากกำหนดให้ $AB = CD$ และ $AB \parallel CD$
 ลากเส้นตรงเชื่อมจุดปลายข้างเดียวกันของ AB และ CD
 จะได้ รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ โดยสัจพจน์ P_1 ลาก AC
 โดย**ทฤษฎีบท 29** จะได้มุมแย้งเท่ากัน
 ดังนั้น $\angle BAC = \angle ACD$ และ $\angle ACB = \angle CAD$
 จาก $AB = CD$, AC เป็นด้านร่วม และ $\angle BAC = \angle ACD$
 โดย**ทฤษฎีบท 4** จะได้ว่า $\triangle BAC \cong \triangle ACD$ ดังนั้น $BC = AD$
 จาก $\triangle BAC \cong \triangle ACD$ จะได้ $\angle CDA = \angle ABC$

โดยทฤษฎีบท 32 จะได้มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก
 นั่นคือ $\hat{BAC} + \hat{ACB} + \hat{CBA} = \hat{DAC} + \hat{ACD} + \hat{CDA}$ เท่ากับสองมุมฉาก
 จาก $\hat{BAC} = \hat{ACD}$, $\hat{CDA} = \hat{ABC}$
 และ $\hat{DAC} + \hat{ACD} + \hat{CDA}$ เท่ากับสองมุมฉาก
 จึงได้ $\hat{DAC} + \hat{BAC} + \hat{CDA}$ เท่ากับสองมุมฉาก
 และ $\hat{DAC} + \hat{BAC} + \hat{ABC}$ เท่ากับสองมุมฉาก
 โดยทฤษฎีบท 28 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดกับเส้นตรงสองเส้น
 ทำให้มุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก
 แล้ว เส้นตรงทั้งสองจะขนานกัน ดังนั้น $BC \parallel AD$
 ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 34 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ด้านตรงข้ามจะยาวเท่ากัน มุมตรงข้ามจะเท่ากัน
 และเส้นทแยงมุมจะแบ่งรูปออกเป็นสองส่วน ๆ กัน
 พิสูจน์ จากกำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยสัจพจน์ P_1 ลาก AC
 โดยทฤษฎีบท 29 จะได้มุมแย้งเท่ากัน ดังนั้น $\hat{BAC} = \hat{ACD}$
 และ $\hat{ACB} = \hat{CAD}$ จาก AC เป็นด้านร่วม
 และ $\hat{BAC} = \hat{ACD}$, $\hat{ACB} = \hat{CAD}$
 โดยทฤษฎีบท 26 ได้ว่ารูปสามเหลี่ยมที่มีมุมเท่ากันสองมุมมุมต่อมุม
 และด้านอีกหนึ่งด้านยาวเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยม
 ทั้งสองนั้น จะเท่ากันทุกประการ ดังนั้น $\triangle BAC \cong \triangle ACD$
 นั่นคือ 1) $AB = CD$ และ $BC = AD$
 2) $\hat{CDA} = \hat{ABC}$
 ทำนองเดียวกัน ถ้าลาก BD จะสามารถแสดงได้ว่า
 $\triangle BAD \cong \triangle BCD$ และ $\hat{BAD} = \hat{DCB}$
 ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 35 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่อยู่บนฐานเดียวกันและด้านบนอยู่บนเส้นขนาน
 กับฐานเส้นเดียวกันแล้ว จะมีพื้นที่เท่ากัน
 พิสูจน์ จากกำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 โดยทฤษฎีบท 34 จะได้ว่า $AD = BC$
 และจากกำหนดให้ $\square EBCF$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 โดยทฤษฎีบท 34 จะได้ว่า $EF = BC$ โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1 จึงได้ว่า $AD = EF$
 นำ DE บวกเข้าทั้งสองข้าง และโดยสิ่งที่เห็นจริง A_2
 จะได้ $AD + DE = EF + DE$ โดยทฤษฎีบท 34 จะได้ว่า $AB = DC$
 และโดยทฤษฎีบท 29 จะได้ว่า $\hat{FDC} = \hat{EAB}$
 โดยทฤษฎีบท 4 จึงได้ว่า $\triangle EAB \cong \triangle FDC$

ดังนั้น พื้นที่ของ $\triangle EAB = \triangle FDC$ นำ พื้นที่ของ $\triangle DGE$ ลบออกทั้งสองข้าง
โดยสิ่งที่เห็นจริง A_3 จึงได้ว่า $\triangle EAB - \triangle DGE = \triangle FDC - \triangle DGE$

นั่นคือ จะได้ $\square ABGD = \square EGCF$

นำ พื้นที่ของ $\triangle BCG$ บวกเข้าทั้งสองข้าง

โดยสิ่งที่เห็นจริง A_2 จึงได้ว่า $\square ABGD + \triangle BCG = \square EGCF + \triangle BCG$

นั่นคือ จะได้ $\square ABCD$ มีพื้นที่เท่ากับ $\square EBCF$

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 36 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีฐานยาวเท่ากัน และมีด้านตรงข้ามกับด้านฐาน
อยู่บนเส้นขนานคู่เดียวกันจะมีพื้นที่เท่ากัน

พิสูจน์ จากกำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

โดยทฤษฎีบท 34 จะได้ว่า $AD = BC$

และจากกำหนดให้ $\square EFGH$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

โดยทฤษฎีบท 34 จะได้ว่า $EH = FG$

จากกำหนดให้ ฐาน $BC = FG$ โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1 จึงได้ว่า $AD = EH$

โดยสิ่งที่เห็นจริง A_2 จึงได้ว่า $AD + DE = EH + DE$

ดังนั้น จะได้ $AE = DH$ จาก $BC = AD$ และ $FG = EH$

โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1 จึงได้ว่า $BC = FG$

โดยสิ่งที่เห็นจริง A_2 จึงได้ว่า $BC + CF = FG + CF$ จะได้ว่า $BF = CG$

จาก $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยทฤษฎีบท 34

จะได้ว่า $AB = CD$ และ $\square EFGH$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

โดยทฤษฎีบท 34 จะได้ว่า $EF = HG$ จาก AD, EH และ BC, FG

อยู่บนเส้นขนานคู่เดียวกัน จะได้ว่า $\widehat{EDC} + \widehat{ADC}$ เท่ากับสองมุมฉาก

จากเส้นตัด DC โดยทฤษฎีบท 29 จะได้ว่ามุมแย้งเท่ากัน

ดังนั้น $\widehat{EDC} = \widehat{DCB}$ จะได้ว่า $\widehat{DCB} + \widehat{DEF}$ เท่ากับสองมุมฉาก

จากเส้นตัด EF โดยทฤษฎีบท 29 จะได้ว่ามุมแย้งเท่ากัน

ดังนั้น $\widehat{HEF} = \widehat{EFC}$ จะได้ว่า $\widehat{HEF} + \widehat{DEF}$ เท่ากับสองมุมฉาก

โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1 จะได้ $\widehat{DCB} + \widehat{DEF} = \widehat{HEF} + \widehat{DEF}$

โดยสิ่งที่เห็นจริง A_3 จึงได้ว่า $\widehat{DCB} = \widehat{HEF}$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\widehat{CDA} = \widehat{GFE}$

โดยทฤษฎีบท 13 จะได้ว่า $\widehat{DCB} + \widehat{DCF}$ เท่ากับสองมุมฉาก

และ $\widehat{HEF} + \widehat{DEF}$ เท่ากับสองมุมฉาก ดังนั้น $\widehat{DCF} = \widehat{DEF}$

ทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\widehat{EDC} = \widehat{CFE}$

โดยทฤษฎีบท 34 จะได้ว่า $\square CDFE$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ซึ่งมีมุมตรงข้ามเท่ากัน ด้านตรงข้าม $DC = EF$ และ $DE = CF$

จาก $DC = EF$ ดังนั้น $AB = EF$ และ $DC = HG$

และจาก $AE = DH$ และ $BF = CG$ จะได้พื้นที่ $\square AEFB =$ พื้นที่ $\square DHGC$
 นำพื้นที่ $\square CDFE$ ลบออกทั้งสองข้าง
 จะได้ พื้นที่ $\square AEFB -$ พื้นที่ $\square CDFE =$ พื้นที่ $\square DHGC -$ พื้นที่ $\square CDFE$
 โดยสิ่งที่เห็นจริง A_3 จึงได้ว่า พื้นที่ $\square ABCD$ เท่ากับพื้นที่ $\square EFGH$

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 37 รูปสามเหลี่ยมที่มีฐานเดียวกัน และจุดยอดกับฐานอยู่บนเส้นขนานคู่เดียวกัน
 จะมีพื้นที่เท่ากัน

พิสูจน์ ลากเส้น AD และต่อออกไปสองด้านถึงจุด E และจุด F
 โดย**ทฤษฎีบท 31** สามารถลาก BE ให้ขนานกับ CA
 และลาก CF ให้ขนานกับ BD โดย**ทฤษฎีบท 35**
 จะได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่อยู่บนฐานเดียวกันและด้านบนอยู่
 บนเส้นขนานกับฐานเส้นเดียวกันแล้ว จะมีพื้นที่เท่ากัน
 นั่นคือ พื้นที่ $\square EBCA =$ พื้นที่ $\square DBCF$
 โดย**ทฤษฎีบท 34** จะได้ว่า

$\triangle BAC$ เป็นครึ่งหนึ่งของ $\square ABCD$

$\triangle DBC$ เป็นครึ่งหนึ่งของ $\square ABCD$

ดังนั้น พื้นที่ $\triangle DBC =$ พื้นที่ $\triangle BAC$

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 38 รูปสามเหลี่ยมที่มีฐานยาวเท่ากัน และจุดยอดกับฐานอยู่บนเส้นขนานคู่เดียวกัน
 จะมีพื้นที่เท่ากัน

พิสูจน์ ลากเส้น AD ต่อออกไปทั้งสองด้าน ต่อจุด A ไปยังจุด I ให้ได้ $AI = BC$
 ต่อจุด D ไปยังจุด G ให้ได้ $DG = EF$
 โดย**ทฤษฎีบท 31** สามารถลาก IB ให้ขนานกับ AC
 และลาก GE ให้ขนานกับ DF โดย**ทฤษฎีบท 36**
 จะได้พื้นที่ $\square IBCA =$ พื้นที่ $\square GEFD$ โดย**ทฤษฎีบท 34**
 จะได้พื้นที่ $\triangle BAC$ เป็นครึ่งหนึ่งของ $\square IBCA$
 และจะได้พื้นที่ $\triangle DEF$ เป็นครึ่งหนึ่งของ $\square GEFD$
 โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1 จะได้พื้นที่ $\triangle DEF$ เป็นครึ่งหนึ่งของ $\square IBCA$
 ดังนั้น จะได้ว่า $\triangle BAC$ และ $\triangle DEF$ มีพื้นที่เท่ากัน

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 39 รูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่เท่ากัน และอยู่บนฐานเดียวกัน โดยจุดยอดอยู่ข้าง
 เดียวกันของฐานแล้ว จุดยอดทั้งสองจะอยู่บนเส้นที่ขนานกับฐาน

พิสูจน์ โดยสัจพจน์ P_1 ลากเส้น AD สมมติว่า AD ไม่ขนานกับ BC
 โดย**ทฤษฎีบท 31** สามารถลาก AE ขนานกับ BC

ให้ AE ตัดกับ BD ที่จุด E จาก $BC \parallel AE$
 โดยทฤษฎีบท 37 จะได้ว่าพื้นที่ $\triangle ABC =$ พื้นที่ $\triangle EBC$
 แต่จากกำหนดให้ว่า $\triangle ABC$ และ $\triangle DBC$ มีพื้นที่เท่ากัน
 โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1 ทำให้พื้นที่ $\triangle DBC =$ พื้นที่ $\triangle EBC$
 ซึ่งเกิดการขัดแย้งกับสิ่งที่เห็นจริง A_5 ทำให้ที่สมมติว่า AD ไม่ขนานกับ BC
 จึงไม่เป็นจริง ดังนั้น เส้น AD ขนานกับเส้น BC
 จึงได้ว่า จุดยอด A และ D อยู่บนเส้นที่ขนานกับฐาน BC

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 40 รูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่เท่ากัน ฐานยาวเท่ากัน และฐานอยู่บนเส้นเดียวกัน
 โดยจุดยอดอยู่ข้างเดียวกันของฐานแล้ว จุดยอดทั้งสองจะอยู่บนเส้นที่
 ขนานกับฐาน

พิสูจน์ โดยสัจพจน์ P_1 ลากเส้น AF จากกำหนดให้ฐาน $BC = DE$ อยู่บนเส้นเดียวกัน
 โดยสัจพจน์ P_1 ลากเส้น DA และ CF

โดยทฤษฎีบท 32 จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยมใด ๆ

ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งออกไปมุนภายนอก

จะเท่ากับผลรวมของมุมภายในสองมุมที่อยู่ตรงข้าม

นั่นคือ $\hat{ACB} = \hat{CDA} + \hat{DAC}$

และ $\hat{FDE} = \hat{DCF} + \hat{CFD}$ และโดยทฤษฎีบท 32 จะได้ว่า

รูปสามเหลี่ยมใด ๆ มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกับจะเท่ากับสองมุมฉาก

ดังนั้น $\hat{CDA} + \hat{DAC} + \hat{CAB} + \hat{ABC}$ เท่ากับสองมุมฉาก

และ $\hat{DCF} + \hat{CFD} + \hat{DFE} + \hat{FED}$ เท่ากับสองมุมฉาก

โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1

จะได้ $\hat{CDA} + \hat{DAC} + \hat{CAB} + \hat{ABC} = \hat{DCF} + \hat{CFD} + \hat{DFE} + \hat{FED}$

นั่นคือ ทำให้พื้นที่ $\triangle DBA =$ พื้นที่ $\triangle ECF$

แต่จาก $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มีพื้นที่เท่ากัน

จะได้ว่า พื้นที่ $\triangle DBA - \triangle ABC =$ พื้นที่ $\triangle ECF - \triangle DEF$

โดยสิ่งที่เห็นจริง A_3 จะได้ พื้นที่ $\triangle DCA =$ พื้นที่ $\triangle CDF$

เนื่องจาก $\triangle DCA$ และ $\triangle CDF$ มีพื้นที่เท่ากัน และและอยู่บนฐานเดียวกัน

โดยทฤษฎีบท 39 จะได้ว่า จุดยอด A และ F อยู่บนเส้นที่ขนานกับฐาน

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 41 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีฐานเดียวกับรูปสามเหลี่ยม ซึ่งจุดยอดของรูป
 สามเหลี่ยม และด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานอยู่บนเส้นเดียวกันที่ขนาน
 กับฐาน รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะมีพื้นที่เป็นสองเท่าของรูปสามเหลี่ยม

พิสูจน์ โดยสัจพจน์ P_1 ลากเส้น AC จะได้ว่า $BC \parallel AE$

โดยทฤษฎีบท 37 จะได้ว่า จะได้ $\triangle ABC$ และ $\triangle EBC$ มีพื้นที่เท่ากัน
 โดยทฤษฎีบท 34 จะได้ว่า $\triangle ABC$ มีพื้นที่เป็นครึ่งหนึ่งของ $\square ABCD$
 ดังนั้น $\triangle EBC$ มีพื้นที่เป็นครึ่งหนึ่งของ $\square ABCD$
 นั่นคือ $\square ABCD$ มีพื้นที่เป็นสองเท่าของ $\triangle EBC$

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 42 สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุม ๆ หนึ่งเท่ากับมุมที่กำหนดให้
 และมีพื้นที่เท่ากับรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้

พิสูจน์ กำหนดให้ $\square EGFY$ มี EF เป็นเส้นทแยงมุม
 โดยทฤษฎีบท 34 จะได้ว่า พื้นที่ $\triangle GEF =$ พื้นที่ $\triangle EFY$
 แต่ $\triangle GEF$ มีพื้นที่เท่ากับ $\triangle ACD$ และ $\triangle EFY$ มีพื้นที่เท่ากับ $\triangle DCB$
 พื้นที่ $\triangle GEF + \triangle EFY = \triangle ACD + \triangle DCB$
 ดังนั้น $\square EGFY$ มีพื้นที่เท่ากับ $\triangle ABC$

ช.ต.ส. (quad erat faciendum; Q.E.F)

ทฤษฎีบท 43 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานใด ๆ ถ้าลากเส้นผ่านจุดใด ๆ บนเส้นทแยงมุมเส้น
 หนึ่งให้ขนานกับด้านสองด้าน จะได้รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานสี่รูป ซึ่งสองรูปที่
 เส้นทแยงมุมเส้นนั้นไม่แบ่งเป็นสองส่วนเท่ากัน จะมีพื้นที่เท่ากัน

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 34 จะได้ว่า $\triangle ABC$ มีพื้นที่เท่ากับ $\triangle ADC$
 $\triangle AEK$ มีพื้นที่เท่ากับ $\triangle AHK$
 $\triangle KGC$ มีพื้นที่เท่ากับ $\triangle KFC$ โดยสิ่งที่เห็นจริง A_2
 จะได้ $\triangle AEK + \triangle KGC = \triangle AHK + \triangle KFC$
 จาก พื้นที่ $\triangle ABC =$ พื้นที่ $\triangle ADC$ โดยสิ่งที่เห็นจริง A_3
 จะได้ พื้นที่ $\triangle ABC -$ พื้นที่ $(\triangle AEK + \triangle KGC)$
 เท่ากับ พื้นที่ $\triangle ADC -$ พื้นที่ $(\triangle AHK + \triangle KFC)$
 ดังนั้น พื้นที่ $\square KEBG =$ พื้นที่ $\square KHDF$
 นั่นคือ $\square KEBG$ และ $\square KHDF$ มีพื้นที่เท่ากัน

ช.ต.พ. (quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 44 สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานบนส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้
 และมีมุมหนึ่งเท่ากับมุมที่กำหนดให้ และมีพื้นที่เท่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้

ทฤษฎีบท 45 สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ให้มีมุมเท่ากับมุมที่กำหนดให้มุมหนึ่ง
 และมีพื้นที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งที่กำหนดให้

ทฤษฎีบท 46 สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนส่วนของเส้นตรงที่กำหนด ให้

ทฤษฎีบท 47 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ จัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากจะมีพื้นที่ เท่ากับ
 ผลบวกของจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 46 สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของ $\triangle ABC$

โดยทฤษฎีบท 31 สามารถสร้างเส้นขนาน $AL \parallel BD$ และโดยสัจพจน์ P_1

ลาก AD, BK, CF เพราะว่า $\hat{CAB}$ และ $\hat{BAG}$ เป็นมุมฉาก

โดยทฤษฎีบท 14 จะได้ว่า เส้น AC เป็นเส้นตรงเดียวกันกับเส้น AG

เพราะว่า $\hat{BAG}$ และ $\hat{GAH}$ เป็นมุมฉาก โดยทฤษฎีบท 14 จะได้ว่า

เส้น BA เป็นเส้นตรงเดียวกันกับเส้น AH เพราะว่า $\hat{DBC}$ และ $\hat{FBA}$

เป็นมุมฉาก ดังนั้น $\hat{DBC} = \hat{FBA}$ โดยสิ่งที่เห็นจริง A_2

จะได้ว่า $\hat{DBC} + \hat{ABC} = \hat{FBA} + \hat{ABC}$

ดังนั้น $\hat{DBA} = \hat{FBC}$ และเนื่องจาก $DB = BC$ และ $FB = BA$

โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $\triangle ABD \cong \triangle FBC$

โดยทฤษฎีบท 41 จะได้ว่า พื้นที่ $\square BMLD = 2$ (พื้นที่ $\triangle ABD$)

และ พื้นที่ $\square ABFG = 2$ (พื้นที่ $\triangle FBC$)

ดังนั้น $\square BMLD = \square ABFG$ ①

ทำนองเดียวกัน เพราะว่า $\hat{ECB}$ และ $\hat{KCA}$ เป็นมุมฉาก

ดังนั้น $\hat{ECB} = \hat{KCA}$ โดยสิ่งที่เห็นจริง A_2

จะได้ว่า $\hat{ECB} + \hat{BCA} = \hat{KCA} + \hat{BCA}$

ดังนั้น $\hat{ECA} = \hat{BCK}$ และเนื่องจาก $EC = BC$ และ $KC = CA$

โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $\triangle ACE \cong \triangle BCK$

โดยทฤษฎีบท 41 จะได้ว่า พื้นที่ $\square MLEC = 2$ (พื้นที่ $\triangle ACE$)

และ พื้นที่ $\square AHKC = 2$ (พื้นที่ $\triangle BCK$)

ดังนั้น $\square MLEC = \square AHKC$ ②

นำ ① + ② โดยสิ่งที่เห็นจริง A_2 จะได้ว่า

$\square BMLD + \square MLEC = \square ABFG + \square AHKC$

แต่ $\square BMLD + \square MLEC = \square BDCE$

โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1 จะได้ว่า $\square BDCE = \square ABFG + \square AHKC$

นั่นคือ พื้นที่ $\square BDCE = BC^2$

พื้นที่ $\square ABFG = BA^2$

พื้นที่ $\square AHKC = AC^2$

ดังนั้น $BC^2 = BA^2 + AC^2$

ช.ต.พ.

(quad erat demonstrandum; Q.E.D)

ทฤษฎีบท 48 รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้าจัดรูสบนด้าน ๆ ด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม
เท่ากับ ผลบวกของจัดรูสบนด้านที่เหลือแล้ว มุมที่ประกอบด้านที่เหลือ
นั้นจะเป็นมุมฉาก

พิสูจน์

โดยทฤษฎีบท 11 สามารถลาก AD ให้ตั้งฉากกับ AC ที่จุด A

โดยสร้างให้ $AD = AB$ จึงได้ $\hat{CAD}$ เป็นมุมฉาก

และโดยสัจพจน์ P_1 ลาก CD

เพราะว่า $AD = AB$ โดยทฤษฎีบท 46 จะได้ $AD^2 = AB^2$

นำ AC^2 บวกเข้าทั้งสองข้าง จะได้ $AD^2 + AC^2 = AB^2 + AC^2$

แต่จากที่กำหนดให้ได้ว่า $BC^2 = AB^2 + AC^2$

โดยสิ่งที่เห็นจริง A_1 จะได้ว่า $AD^2 + AC^2 = BC^2$

$\hat{C}AD$ เป็นมุมฉาก โดยทฤษฎีบท 47 จะได้ว่า $AD^2 + AC^2 = DC^2$

ดังนั้น $BC = DC$ เพราะว่ามีด้านเท่ากันสามด้าน

จึงทำให้ $\hat{C}AD = \hat{C}AB$ เท่ากับ มุมฉาก ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle ADC$

นั่นคือ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

ช.ต.พ.

(quad erat demonstrandum; Q.E.D)

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การสร้างชุดการฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เพื่อฝึกการสร้างรูปเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด รวมทั้งการฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด และทำให้ผู้เรียนเกิดการเปลี่ยนมุมมองการคิดทฤษฎีเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด จากนามธรรมเป็นรูปธรรม ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad นั้นมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ผู้เรียนจะต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการใช้โปรแกรม นักวิจัยจึงต้องแนะนำการสร้างรูปเรขาคณิตจากเครื่องมือจุด วงเวียน และเส้น การค้นหาความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิตจากเครื่องมือจุด วงเวียน และเส้น กับทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด และการสร้างรูปเรขาคณิตเพื่ออธิบายการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ให้ทราบก่อน ดังนี้

3.1 การสร้างรูปเรขาคณิตจากเครื่องมือจุด วงเวียน และเส้น ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

3.1.1 การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง

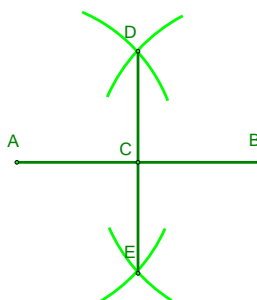
กำหนดให้ AB เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง มีจุด A และ B เป็นจุดปลายต้องการแบ่งเส้นตรง AB ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน



ภาพที่ 3.1 แสดงส่วนของเส้นตรง AB

วิธีสร้าง

1. ให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง เลือกคำสั่งวงเวียนออกให้ได้ระยะพอประมาณ แต่ต้องมากกว่าครึ่งหนึ่งของระยะ AB เขียนส่วนโค้งไว้ที่ด้านบนและล่างของเส้นตรง AB
2. ให้จุด B เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมีระยะเดียวกับข้อ 1 เขียนส่วนโค้งตัดกับส่วนโค้งเดิมทั้งด้านบนและด้านล่างที่จุด D และ E ตามลำดับ
3. สร้างส่วนของเส้นตรง DE ตัดกับ AB ที่จุด C จะได้ระยะ $AC = CB$



ภาพที่ 3.2 แสดงส่วนของเส้นตรง DE ตัดกับ AB ที่จุด C จะได้ระยะ $AC = CB$

ข้อสังเกต การแบ่งครึ่งเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงใด ๆ ที่กำหนดให้แบบนี้ออกเป็น ส่วนที่เท่าๆกันจะแบ่งได้ จำนวนที่เป็นเลขคู่บางจำนวนเท่านั้น เช่น 2 ส่วนเท่าๆกัน 4 ส่วนเท่าๆกัน หรือ 8 ส่วนเท่าๆกัน เป็นต้น แต่ไม่สามารถแบ่งเส้นตรงดังกล่าวออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กัน หรือ แบ่ง ออกเป็น 5 ส่วนที่เท่าๆ กันได้

3.1.2 การสร้างส่วนของเส้นตรงให้เท่ากับส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

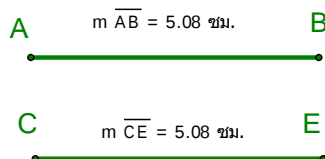
กำหนดให้ AB และ CD เป็นส่วนของเส้นตรงสองเส้นใดๆ โดยที่ CD ยาวกว่า AB ต้องการสร้างเส้นตรง CE บนเส้นตรง CD โดยให้ $AB = CE$



ภาพที่ 3.3 แสดงส่วนของเส้นตรง AB และ CD

วิธีสร้าง

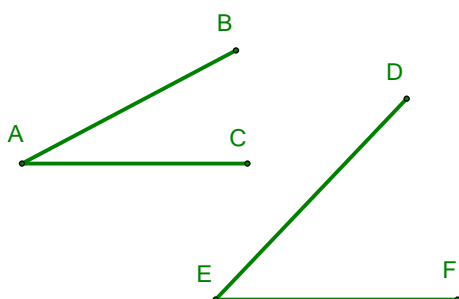
1. เลือกค่าส่งวงเวียนไปทางวัดระยะให้ได้รัศมีเท่ากับ AB พอดี
2. ให้จุด E เป็นจุดศูนย์กลาง เขียนส่วนโค้งรัศมีเท่ากับ AB ตัดเส้นตรง CD ที่จุด O
3. จะได้ส่วนของเส้นตรงซึ่งมีระยะ $AB = CE$



ภาพที่ 3.4 แสดงส่วนของเส้นตรง $AB = CE$

3.1.3 การสร้างมุมให้เท่ากับมุมที่กำหนดให้

กำหนดให้ $\angle BAC$ และ $\angle DEF$ เป็นมุมสองมุมใด ๆ โดยที่ $\angle DEF$ โตกว่า $\angle BAC$

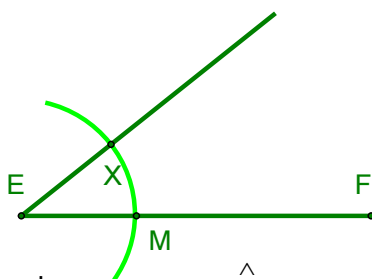


ภาพที่ 3.5 แสดง $\angle BAC$ และ $\angle DEF$

ต้องการสร้างมุมที่มีขนาดเท่ากับ มุม $\widehat{BAC}$ ($m(\widehat{BAC})$) ซึ่งมีด้าน EF เป็นส่วนประกอบแขนของมุมด้านหนึ่ง

วิธีสร้าง

1. ให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง คำสั่งวงเวียนออกรัศมีพอประมาณ เขียนส่วนโค้งตัดแขน AC และ AB ที่จุด T และ S ตามลำดับ
2. ให้จุด E เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมีเดียวกับข้อ 1 เขียนส่วนโค้งตัดแขน EF และ ED ที่จุด M และ N ตามลำดับ
3. เลือกคำสั่งวงเวียนไปทางวัดระยะให้ได้รัศมีเท่ากับ ST ให้จุด M เป็นจุดศูนย์กลาง เขียนส่วนโค้งรัศมีเท่ากับ ST ในข้อ 3 ตัดส่วนโค้ง MN ที่จุด X
4. ลากเส้นตรง EX จะได้มุม $\widehat{XEM}$ เท่ากับมุม $\widehat{BAC}$



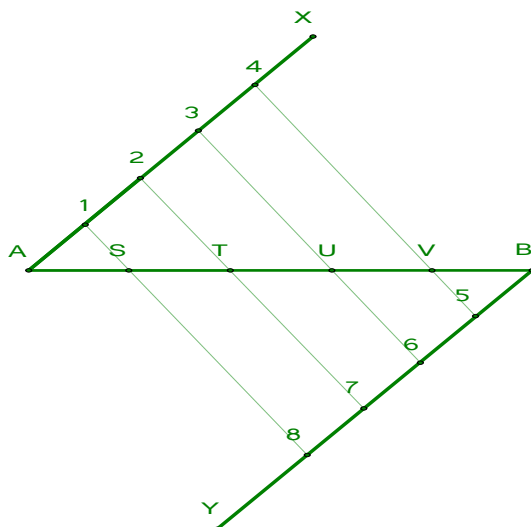
ภาพที่ 3.6 แสดง $m(\widehat{XEM}) = m(\widehat{BAC})$

3.1.4 การแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็นหลาย ๆ ส่วนที่เท่ากัน

กำหนดให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งต้องการแบ่งเส้นตรง AB ออกเป็นห้าส่วนเท่า ๆ กัน

วิธีสร้าง

1. สร้างมุมขนาดเท่ากันบนจุดปลาย A และ B ของเส้นตรง AB โดยให้แขนของมุมที่สร้างขึ้นใหม่อยู่คนละข้าง (มุมหนึ่งอยู่ด้านบนอีกมุมหนึ่งอยู่ด้านล่าง)
2. ให้ AX และ BY เป็นแขนของมุมที่สร้างขึ้นใหม่ จากนั้นใช้วงเวียนกำหนดจุดบน AX และ BY ด้านละสี่จุด เท่า ๆ กัน และแต่ละจุดจะมีระยะห่างเท่า ๆ กัน
3. ให้จุด 1, 2, 3, 4 เป็นจุดบน AX และ 5, 6, 7, 8 เป็นจุดบน BY โดยจุดทั้งหมดมีระยะห่างเท่า ๆ กัน
4. ลากเส้นตรง ระหว่างจุด 1 กับ 8, 2 กับ 7, 3 กับ 6 และ 4 กับ 5 ตัดเส้นตรง AB ที่จุด S, T, U และ V
5. จะได้เส้นตรง $AS = ST = TU = UV = VB$ ซึ่งเป็นห้าส่วนเท่า ๆ กัน



ภาพที่ 3.7 แสดงการแบ่งเส้นตรง AB ออกเป็นห้าส่วนเท่าๆ กัน

ข้อสังเกต ถ้าต้องการแบ่งเส้นตรงออกเป็นกี่ส่วนเท่าๆ กัน โดยวิธีนี้จะทำได้เสมอ โดยกำหนดจุดบนแกนประกอบมุมที่สร้างขึ้น จำนวน n จุด จะทำให้ได้ส่วนของเส้นตรงที่ต้องการแบ่ง เป็นจำนวน $n+1$ ส่วนเท่า ๆ กันนั่นเอง

3.1.5 การสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดบนเส้นตรง

กำหนดให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง และจุด C เป็นจุดบน AB

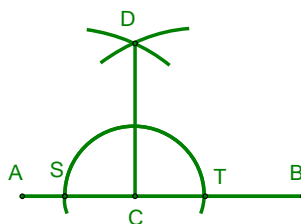
ต้องการสร้างเส้นตั้งฉาก DC บนเส้นตรง AB ณ จุด C



ภาพที่ 3.8 แสดง AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง และจุด C เป็นจุดบน AB

วิธีสร้าง

1. เลือกคำสั่งวงเวียนออกรัศมีพอประมาณให้จุด C เป็นจุดศูนย์กลาง เขียนส่วนโค้งตัด AB ที่ S และ T
2. เลือกคำสั่งวงเวียนออกรัศมีพอประมาณและยาวกว่าระยะ SC ให้จุด S และจุด T เป็นจุดศูนย์กลางเขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด D
3. ลาก CD จะได้เส้นตรง CD ตั้งฉากกับเส้นตรง AB ณ จุด C



ภาพที่ 3.9 แสดง CD ตั้งฉากกับเส้นตรง AB ณ จุด C

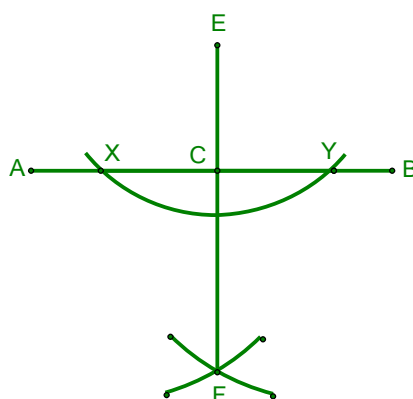
3.1.6 การสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกเส้นตรง

กำหนดให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง และจุด E เป็นจุดภายนอก AB ต้องการสร้างเส้นตั้งฉาก EF ตั้งฉากกับเส้นตรง AB ณ จุด C



ภาพที่ 3.10 แสดง AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง และจุด E เป็นจุดภายนอก
วิธีสร้าง

1. ให้จุด E เป็นจุดศูนย์กลาง เลือกค่ารัศมีวงเวียนรัศมีพอประมาณ เขียนส่วนโค้งตัด AB ที่จุด X และ Y
2. ให้จุด X และ Y เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้ค่ารัศมีวงเวียนรัศมีพอประมาณ เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด F
3. ลาก EF ตัดเส้นตรง AB ที่จุด C จะได้เส้นตรง EF ตั้งฉากกับเส้นตรง AB ที่จุด C



ภาพที่ 3.11 แสดงส่วนของเส้นตรง EF ตั้งฉากกับเส้นตรง AB ที่จุด C

3.2 การค้นหาความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิตจากเครื่องมือจุด วงเวียน และเส้น กับทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

การค้นหาความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิตจากเครื่องมือจุด วงเวียน และเส้น กับทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad สำหรับเป็นข้อมูลเพื่อใช้ในการพิสูจน์ประพจน์ของยูคลิดนั้น โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ใช้เงื่อนไขการพิสูจน์ตามระบบเชิงสัจพจน์ไว้ตามข้อกำหนด สิ่งที่เห็นจริง หรือ อีกเซียม 5 ประพจน์ แยกออกไว้ต่างหากจากสัจพจน์ทางเรขาคณิต 5 ประพจน์ และนิยาม 23 นิยาม ของยูคลิด

3.3 การสร้างรูปเรขาคณิต เพื่ออธิบายการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด

การสร้างรูปเรขาคณิต เพื่ออธิบายการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิดนั้น นักวิจัยจะใช้วิธีการสร้างพื้นฐานด้วยเครื่องมือจุด วงเวียน และเส้น รวมถึงความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิตจากเครื่องมือจุด วงเวียน และเส้น กับทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

3.4 จำนวนผู้เรียนที่สามารถสร้างรูปเรขาคณิต เพื่ออธิบายการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

ผู้เรียนที่สามารถสร้างรูปเรขาคณิต เพื่ออธิบายการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad จะแสดงดังตาราง ต่อไปนี้

ตาราง 3.1 ตารางแสดงจำนวนผู้เรียนที่สามารถสร้างรูปเรขาคณิต เพื่ออธิบายการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

ลำดับที่	ชื่อ – สกุล	จำนวนผู้เรียนที่สามารถแสดง พิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตใน ระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม GSP	
		ได้	ไม่ได้
1	นางสาวนัตยา จงไพศาล		
2	นางสาวอัมรา แก้วเสน		
3	นางสาวดวงใจ จันจอม		
4	นางสาวสุนิสา มาดี		
5	นางสาวทิพย์สุนันท์ วงศ์ษา		
6	นางสาวสุภาวรรณ พันธุ์เพ็ง		
7	นางสาวปิยนุช ไม้ลา		
8	นางสาววาสนา นิลสนธิ		
9	นางสาวสรินนา ขวัญสูตร		
10	นางสาวกชมน สิริธิประสงค์		
11	นางสาวกนกวรรณ กองเก็น		
12	นางสาวระวีวรรณ ฤทธิเนติกุล		
13	นางสาวประภาพร ไขทอง		
14	นางสาวดลยา เศรษฐสิงห์		
15	นางสาวนภัสสร อ่อนพรม		

ลำดับที่	ชื่อ - สกุล	จำนวนผู้เรียนที่สามารถแสดง พินิจทัศนคติใน ระนาบของยุคคิด ด้วยโปรแกรม GSP	
		ได้	ไม่ได้
16	นางสาวสุกัญญา พาคำ		
17	นางสาวพรชนก พณิชีพ		
รวม			
ร้อยละ			

บทที่ 4

ผลการวิจัย

การศึกษาการสร้างชุดการฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เพื่อฝึกการสร้างรูปเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด โดยให้ผู้เรียนใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สำหรับการฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด และมีผลทำให้ผู้เรียนเกิดการเปลี่ยนมุมมองการคิด ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด จากนามธรรมเป็นรูปธรรม มีผลการทดลอง เป็นดังนี้

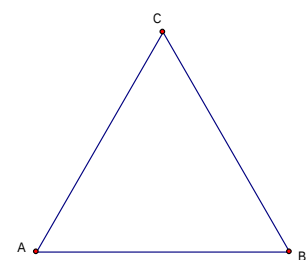
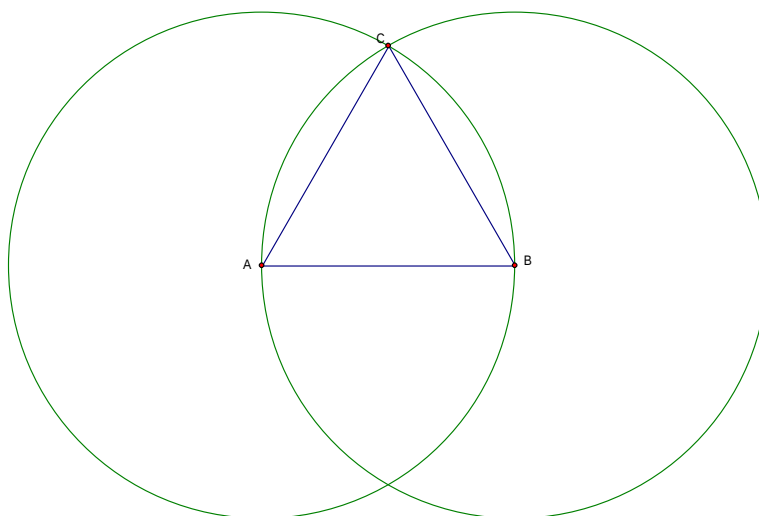
4.1 ผลสร้างรูปเรขาคณิต เพื่อแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สำหรับการฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 ถึงทฤษฎีบทที่ 48 เป็นดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 สามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าบนส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

ตารางที่ 4.1 ตารางแสดงความยาวของด้าน ของรูปสามเหลี่ยม ABC

ด้าน	ความยาวด้าน (ซม.)
AC	5.82
AB	5.82
BC	5.82



$m \overline{AC} = 5.82$ ซม.
 $m \overline{CB} = 5.82$ ซม.
 $m \overline{AB} = 5.82$ ซม.

ภาพที่ 4.1 แสดงรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งสร้างบนส่วนของเส้นตรง AB

จากตารางที่ 4.1 และภาพ 4.1 แสดงให้เห็นชัดเจนว่าการใช้จุด A และจุด B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีวงกลมยาวเท่ากับความยาวด้าน AB ทำให้เกิดด้าน AC และด้าน BC ที่ความยาวเท่ากับด้าน AB

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า ความยาวด้าน $AB = AC = BC$

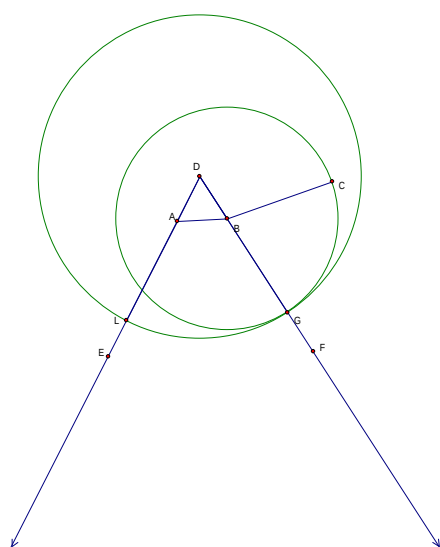
นั่นคือ รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

■

ทฤษฎีบทที่ 2 สามารถสร้างส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดที่กำหนดให้ ให้ยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

ตารางที่ 4.2 ตารางแสดงความยาวด้าน $\overline{AL}$ และ ความยาวด้าน $\overline{BC}$

ด้าน	ความยาวด้าน (ซม.)
AL	3.42
BC	3.42



$$m \overline{AL} = 3.42 \text{ ซม.}$$

$$m \overline{BC} = 3.42 \text{ ซม.}$$

ภาพที่ 4.2 แสดงความยาวด้าน $\overline{AL}$ และ ความยาวด้าน $\overline{BC}$

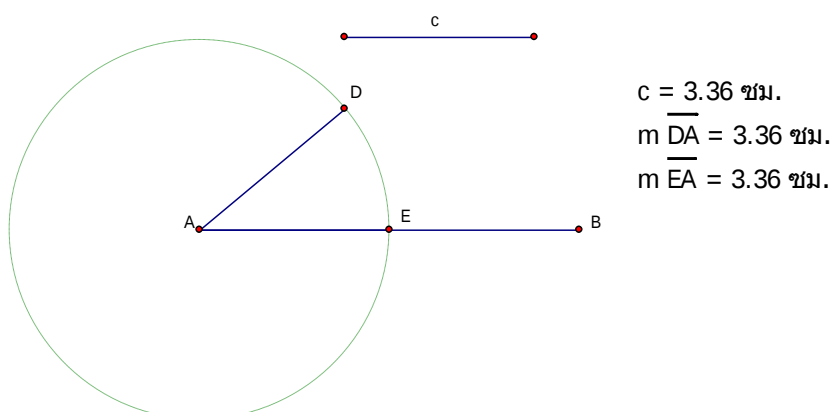
จากตารางที่ 4.2 ภาพที่ 4.2 แสดงให้เห็นชัดเจนว่า สามารถสร้าง $\overline{AL}$ ให้มีความยาวเท่ากับ $\overline{BC}$ นั่นคือ สามารถสร้างส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดที่กำหนดให้ ให้ยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

■

ทฤษฎีบทที่ 3 กำหนดส่วนของเส้นตรงที่ยาวไม่เท่ากันสองเส้น สามารถตัดส่วนของเส้นตรงที่ยาวให้เท่ากับเส้นสั้น

ตารางที่ 4.3 ตารางแสดงความยาวด้าน $\overline{AD}$ และ ความยาวด้าน $\overline{AE}$

ด้าน	ความยาวด้าน (ซม.)
AD	3.36
AE	3.36



ภาพที่ 4.3 แสดง แสดงความยาวด้าน $\overline{AD}$ และ ความยาวด้าน $\overline{AE}$

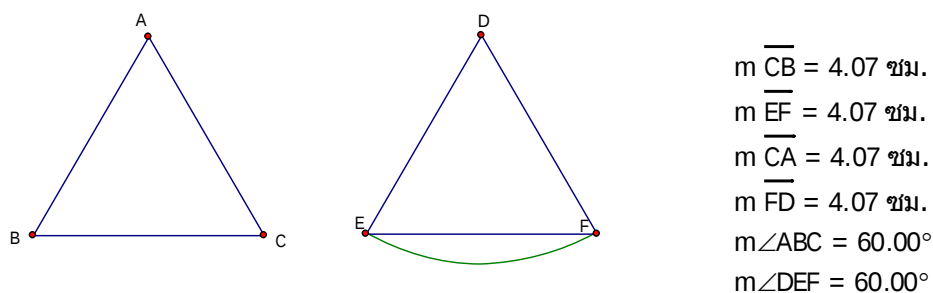
จากตารางที่ 4.3 และภาพที่ 4.3 แสดงให้เห็นว่าสามารถตัดส่วนของเส้นตรง $\overline{AE}$ จากส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ ให้มีความยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรงที่ยาว c หน่วย

■

ทฤษฎีบทที่ 4 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสองด้าน ด้านต่อด้านและมีมุมในระหว่างด้านเท่า เท่ากันแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะมีด้านและมีมุมที่เหลือเท่ากัน (รูปสามเหลี่ยมทั้งสองเท่ากันทุกประการ)

ตารางที่ 4.4 ตารางแสดงความยาวด้าน และขนาดของมุม ของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF

ด้านของรูปสามเหลี่ยม (ซม.)		ขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม (องศา)	
ABC	DEF	ABC	DEF
AC = 4.07 ซม.	DF = 4.07 ซม.	ABC = 60°	DEF = 60°
BC = 4.07 ซม.	EF = 4.07 ซม.		



ภาพที่ 4.4 แสดงแสดงความยาวด้าน และขนาดของมุม ของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF

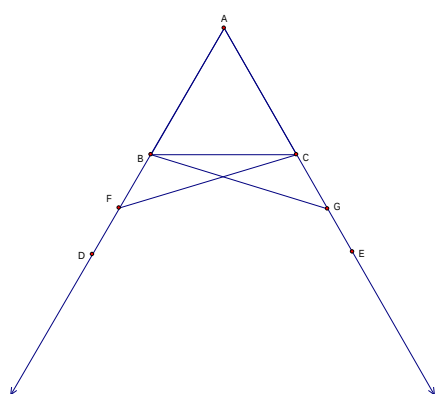
จากตารางที่ 4.4 และภาพที่ 4.4 แสดงให้เห็นว่า $\overline{BC} = \overline{EF}$, $\angle ABC = \angle DEF$ และ $\angle ACB = \angle DFE$ นั่นคือ รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการ

■

ทฤษฎีบทที่ 5 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ย่อมมีมุมที่ฐานเท่ากัน และถ้าต่อด้านที่เท่ากัน ออกไปทางฐานจะได้ว่ามุมที่ฐานเท่ากันด้วย

ตารางที่ 4.5 ตารางแสดงความยาวด้าน และขนาดของมุมที่ต่อออกไปจากฐาน ของรูปสามเหลี่ยม ABC

ด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC (ซม.)		ขนาดของมุม(องศา)	
AB = 4.49 ซม.	AC = 4.49 ซม.	ABG = 76.94°	ACF = 76.94°
		AFC = 43.60°	AGB = 43.06°
		ABC = 43.60°	CGB = 43.60°
		FCB = 16.94°	CBG = 16.94°
		BCF = 16.94°	CBG = 16.94°
		ACF – BCF = 60°	
		ABG – CBG = 60°	



$$\begin{aligned}
 \overline{BA} &= 4.49 \text{ ซม.} \\
 \overline{AC} &= 4.49 \text{ ซม.} \\
 m\angle GCB &= 120.00^\circ & m\angle FCB &= 16.94^\circ \\
 m\angle ABG &= 76.94^\circ & m\angle CBG &= 16.94^\circ \\
 m\angle ACF &= 76.94^\circ & m\angle BCF &= 16.94^\circ \\
 m\angle AFC &= 43.06^\circ & m\angle CBG &= 16.94^\circ \\
 m\angle AGB &= 43.06^\circ & m\angle ACF - m\angle BCF &= 60.00^\circ \\
 m\angle BFC &= 43.06^\circ & m\angle ABG - m\angle CBG &= 60.00^\circ \\
 m\angle CGB &= 43.06^\circ
 \end{aligned}$$

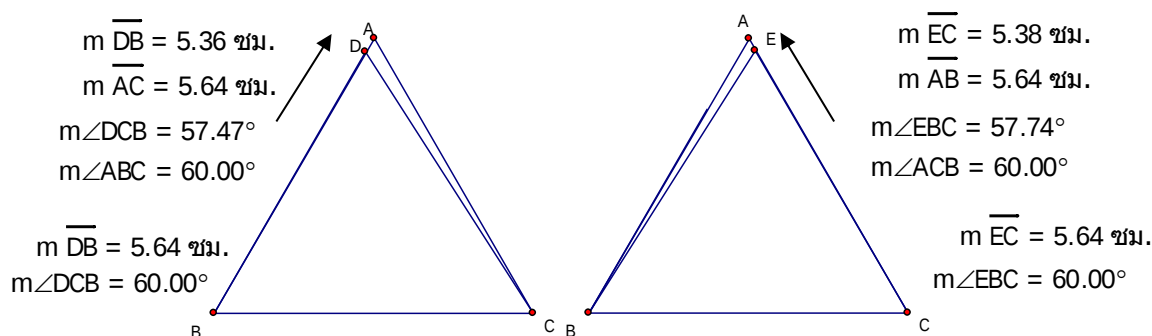
ภาพที่ 4.5 แสดงความยาวด้าน และขนาดของมุมที่ต่อออกไปจากฐาน
ของรูปสามเหลี่ยม ABC

จากตารางที่ 4.5 และภาพที่ 4.5 แสดงให้เห็นว่า $ABC = ACB$ และ $CBD = BCE$

ทฤษฎีบทที่ 6 ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมเท่ากันสองมุมแล้ว ด้านตรงข้ามมุมที่เท่ากัน
ย่อมเท่ากัน

ตารางที่ 4.6 ตารางแสดงความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เท่ากันสองมุม

ขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม (องศา)	ความยาวของด้าน (ซม.)
$ACB = ABC = 60^\circ$	$AC = 5.64$ ซม.
$ACB = ABC = 60^\circ$	$AB = 5.64$ ซม.
$BAC = ABC = 60^\circ$	$BC = 5.64$ ซม.



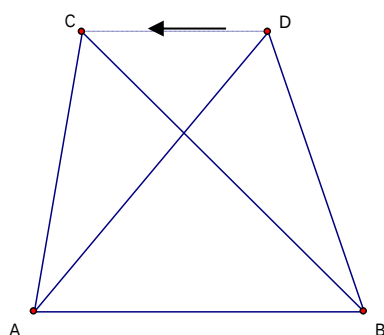
ภาพที่ 4.6 แสดงความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เท่ากันสองมุม

จากตารางที่ 4.6 และภาพที่ 4.6 แสดงให้เห็นว่า ถ้ากำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม
เท่ากันสองมุม คือ $ACB = ABC$ ทำให้ด้านตรงข้ามมุมที่เท่ากันย่อมเท่ากัน คือ $\overline{AC} = \overline{AB}$

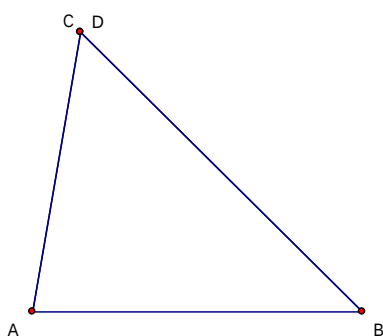
ทฤษฎีบทที่ 7 ถ้าลากส่วนของเส้นตรง จากจุดปลายทั้งสองของเส้นตรงเส้นหนึ่งไปพบกัน
ข้างหนึ่งของเส้นตรง จะไม่สามารถลากส่วนของเส้นตรงคู่อื่นใดจากจุดเดิม
ตามลำดับให้เท่ากับส่วนของเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นตามลำดับโดยให้พบกัน
ข้างเดียวกันนั้นได้อีก

ตารางที่ 4.7 ตารางแสดงความยาวของด้านที่เกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงจาก
จุดปลาย A และ B

ความยาวของด้าน (ซม.)	ความยาวของด้าน (ซม.)
$AC = 5.02$ ซม.	$AD = 6.44$ ซม.
$BC = 7.02$ ซม.	$BD = 5.23$ ซม.
$AC = 5.02$ ซม.	$AD = 5.02$ ซม.
$BC = 7.02$ ซม.	$BD = 7.02$ ซม.



$$\begin{aligned} m \overline{AD} &= 6.44 \text{ ซม.} & m \overline{DB} &= 5.23 \text{ ซม.} \\ m \overline{CA} &= 5.02 \text{ ซม.} & m \overline{CB} &= 7.02 \text{ ซม.} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} m \overline{AD} &= 5.02 \text{ ซม.} & m \overline{DB} &= 7.02 \text{ ซม.} \\ m \overline{CA} &= 5.02 \text{ ซม.} & m \overline{CB} &= 7.02 \text{ ซม.} \end{aligned}$$

ภาพที่ 4.7 แสดงความยาวของด้านที่เกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงจาก
จุดปลาย A และ B

จากตารางที่ 4.7 และภาพที่ 4.7 แสดงให้เห็นว่า จะไม่สามารถลากส่วนของเส้นตรงจากจุด
ปลาย A และ B ให้ยาวเท่ากับ $\overline{AC}$ และ $\overline{CB}$ ตามลำดับ ให้พบกันที่จุดนอกเส้นตรง AB ที่อยู่
ข้างเดียวกันกับ C ได้

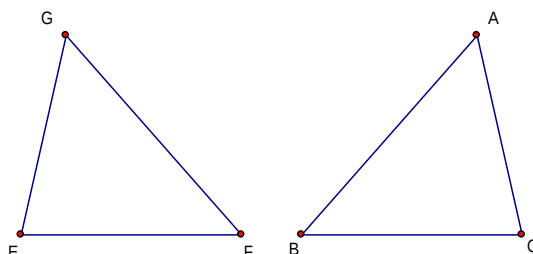


ทฤษฎีบทที่ 8 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสองด้าน ด้านต่อด้าน และมีฐานเท่ากันแล้วรูปสามเหลี่ยมทั้งสอง จะมีมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านฐานเท่ากัน

ตารางที่ 4.8 ตารางแสดงความยาวด้าน และขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามฐานของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม EFG

ความยาวด้านที่สมนัยกัน (ซม.)		ขนาดของมุมตรงข้ามฐาน (องศา)	
รูปสามเหลี่ยม ABC	รูปสามเหลี่ยม EFG	รูปสามเหลี่ยม ABC	รูปสามเหลี่ยม EFG
$AB = 4.71$ ซม.	$GF = 4.71$ ซม.	$BAC = 53.74^\circ$	$EGF = 53.74^\circ$
$AC = 3.63$ ซม.	$EG = 3.63$ ซม.		

$m \overline{EG} = 3.63$ ซม.
 $m \overline{AC} = 3.63$ ซม.
 $m \overline{GF} = 4.71$ ซม.
 $m \overline{BA} = 4.71$ ซม.



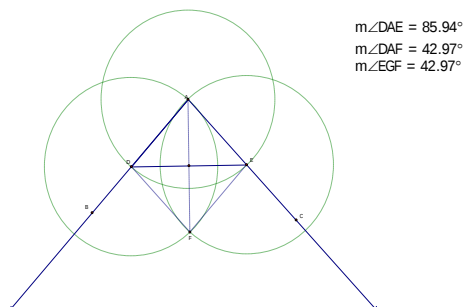
$m \overline{BC} = 3.89$ ซม.
 $m \overline{EF} = 3.89$ ซม.
 $m \angle EGF = 53.74^\circ$
 $m \angle BAC = 53.74^\circ$

ภาพที่ 4.8 แสดงความยาวด้าน และขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามฐานของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม EFG
จากตารางที่ 4.8 และภาพที่ 4.8 แสดงให้เห็นว่า $BAC = EGF$

ทฤษฎีบทที่ 9 การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้

ตารางที่ 4.9 ตารางแสดงการแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้

ขนาดของมุมที่กำหนดให้	ขนาดของมุมที่เกิดจากการแบ่งครึ่ง
$DAE = 85.94^\circ$	$DAF = 42.97^\circ$
	$EGF = 42.97^\circ$



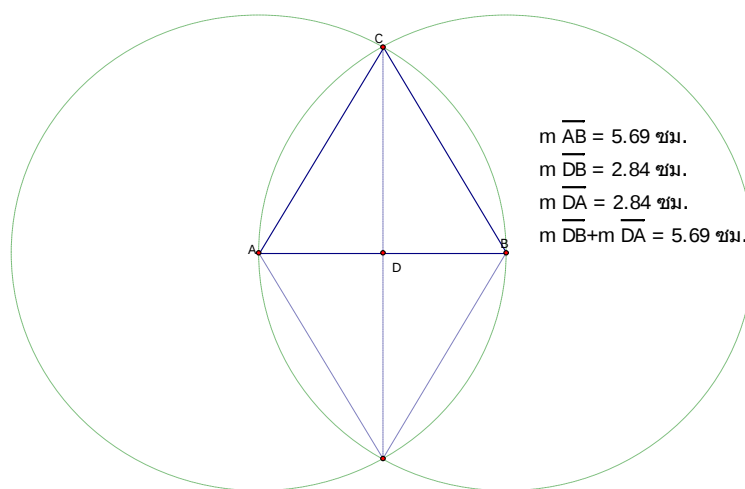
$m \angle DAE = 85.94^\circ$
 $m \angle DAF = 42.97^\circ$
 $m \angle EGF = 42.97^\circ$

ภาพที่ 4.9 แสดงการแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้
จากตารางที่ 4.9 และภาพที่ 4.9 แสดงให้เห็นว่าสามารถแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้ได้

ทฤษฎีบทที่ 10 สามารถแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

ตารางที่ 4.10 ตารางแสดงความยาวของเส้นตรง

ความยาวของส่วนของเส้นตรง (ซม.)	ขนาดของมุมที่เกิดจากการแบ่งครึ่ง
$\overline{AB} = 5.69$ ซม.	$\overline{AD} = 2.84$ ซม.
	$\overline{DB} = 2.84$ ซม.



ภาพที่ 4.10 แสดงการแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

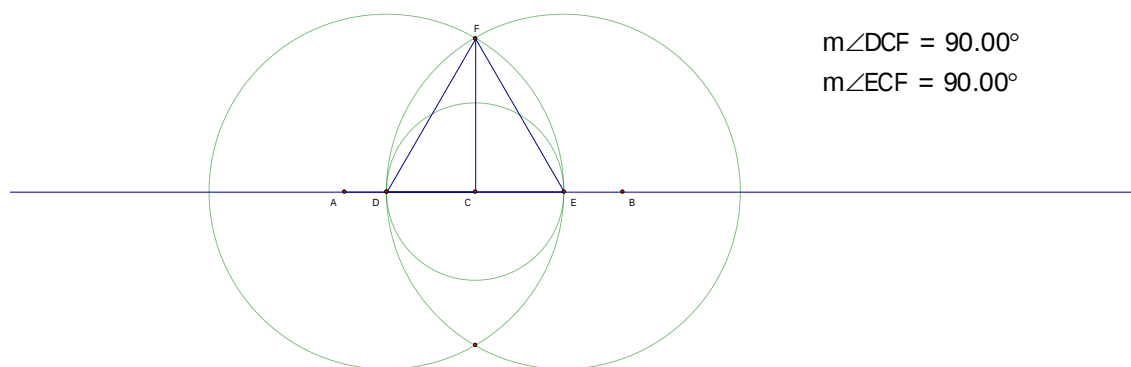
จากตารางที่ 4.10 และภาพที่ 4.10 แสดงให้เห็นว่าสามารถแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ได้

■

ทฤษฎีบทที่ 11 สามารถลากเส้นมาตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้ ที่จุดกำหนดให้บนเส้นตรง

ตารางที่ 4.11 ตารางแสดงขนาดของมุมที่เกิดจากการลากเส้นมาตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้

ขนาดของมุม (องศา)
$\angle DCF = 90^\circ$
$\angle ECF = 90^\circ$



ภาพที่ 4.11 แสดงการลากเส้นมาตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้

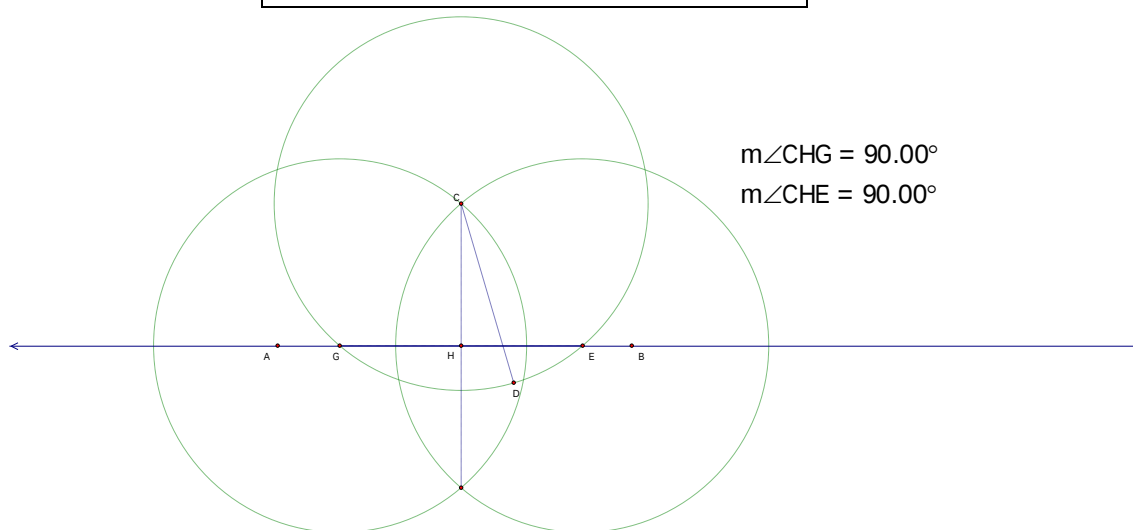
จากตารางที่ 4.11 และภาพที่ 4.11 แสดงให้เห็นว่าสามารถลากเส้นมาตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้บนเส้นตรงได้



ทฤษฎีบทที่ 12 สามารถลากเส้นจากจุดที่กำหนดให้ ไปตั้งฉากกับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งที่กำหนดให้

ตารางที่ 4.12 ตารางแสดงขนาดของมุมที่เกิดจากการลากเส้นจากจุดที่กำหนดให้ มาตั้งฉากกับเส้นตรง

ขนาดของมุม (องศา)
$CHG = 90^\circ$
$CHE = 90^\circ$



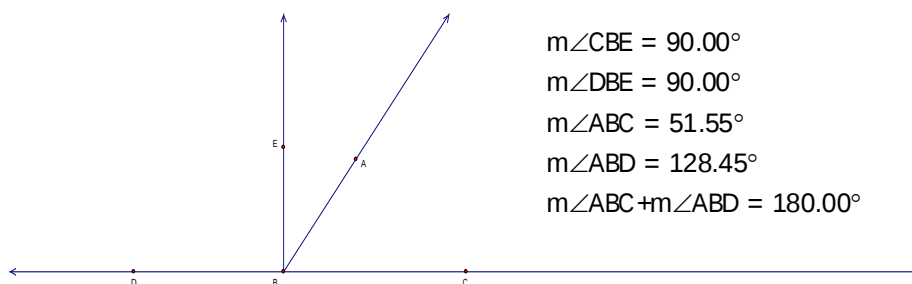
ภาพที่ 4.12 แสดงการลากเส้นจากจุดที่กำหนดให้ มาตั้งฉากกับเส้นตรง

จากตารางที่ 4.12 และภาพที่ 4.12 แสดงให้เห็นว่าสามารถลากเส้นจากจุดที่กำหนดให้ มาตั้งฉากกับเส้นตรงได้

ทฤษฎีบทที่ 13 เส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง จะได้มุมประชิดแต่ละมุมเป็นมุมฉากหรือมุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก

ตารางที่ 4.13 ตารางแสดงขนาดของมุมประชิด

มุมของเส้นตรง (องศา)	ขนาดของมุมประชิด (องศา)
$\overrightarrow{AC} = 180^\circ$	$CBE = 90^\circ$
	$DBE = 90^\circ$
	$ABC = 51.55^\circ$
	$ABD = 128.45^\circ$



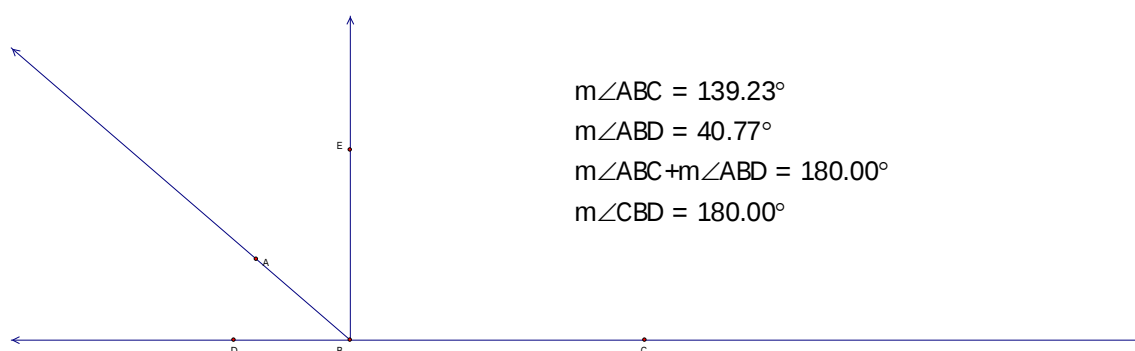
ภาพที่ 4.13 แสดงขนาดของมุมประชิดแต่ละมุมเป็นมุมฉากหรือมุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก

จากตารางที่ 4.13 และภาพที่ 4.13 แสดงให้เห็นว่า ขนาดของมุมประชิดแต่ละมุมเป็นมุมฉากหรือมุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก

ทฤษฎีบทที่ 14 ที่จุดหนึ่งบนเส้นตรง ถ้ามีเส้นตรงสองเส้นที่ลากจากจุดจุดนั้นแต่อยู่คนละข้างทำให้เกิดมุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉากแล้ว เส้นตรงทั้งสองจะต่อเป็นเส้นตรงเดียวกัน

ตารางที่ 4.14 ตารางแสดงขนาดของมุมประชิด

ขนาดของมุม (องศา)	ผลรวมของมุมประชิด(องศา)
$ABC = 139.23^\circ$	$ABC + ABD = 180^\circ$
$ABD = 40.77^\circ$	



ภาพที่ 4.14 แสดงมุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก และเส้นตรงทั้งสองต่อเป็นเส้นตรงเดียวกัน

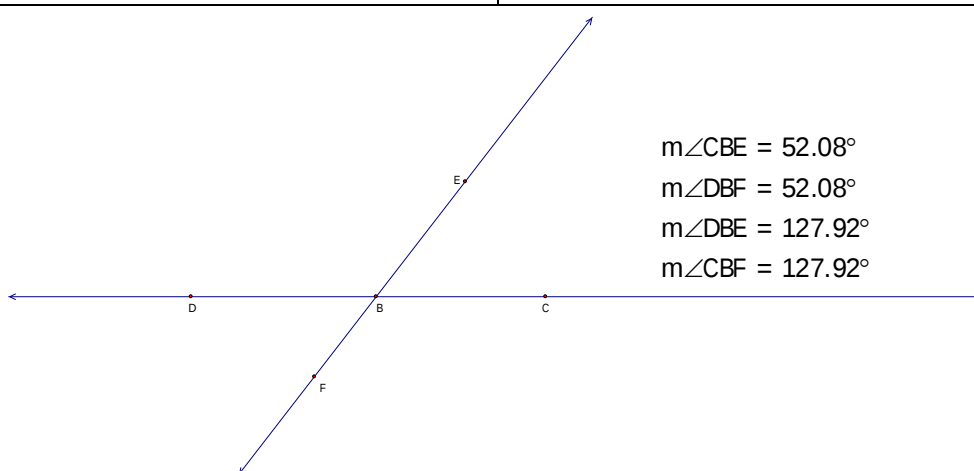
จากตารางที่ 4.14 และภาพที่ 4.14 แสดงให้เห็นว่าถ้ามีเส้นตรงสองเส้นที่ลากจากจุดจุดนั้น แต่อยู่คนละข้างทำให้เกิดมุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉากแล้ว เส้นตรงทั้งสองจะต่อเป็นเส้นตรงเดียวกัน

■

ทฤษฎีบทที่ 15 เส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน

ตารางที่ 4.15 ตารางแสดงขนาดของมุม CBD, DBF, DBE และ CBF

ขนาดของมุม (องศา)	ขนาดของมุมที่เท่ากัน (องศา)
$CBD = 52.08^\circ$	$CBD = DBF = 52.08^\circ$
$DBF = 52.08^\circ$	
$DBE = 127.92^\circ$	$DBE = CBF = 127.92^\circ$
$CBF = 127.92^\circ$	



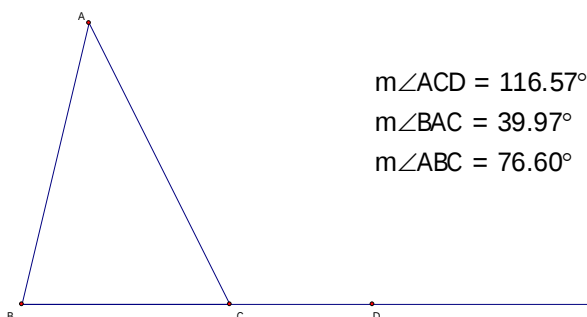
ภาพที่ 4.15 แสดงขนาดของมุม CBD, DBF, DBE และ CBF

จากตารางที่ 4.15 และภาพที่ 4.15 แสดงให้เห็นว่าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน

ทฤษฎีบทที่ 16 ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะโตกว่ามุมภายในที่อยู่ตรงข้าม

ตารางที่ 4.16 ตารางแสดงขนาดของมุมภายใน และมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยม ABC

ขนาดของมุมภายใน (องศา)	ขนาดของมุมภายนอก (องศา)
$BAC = 39.97^\circ$	$ACD = 116.57^\circ$
$ABC = 76.60^\circ$	



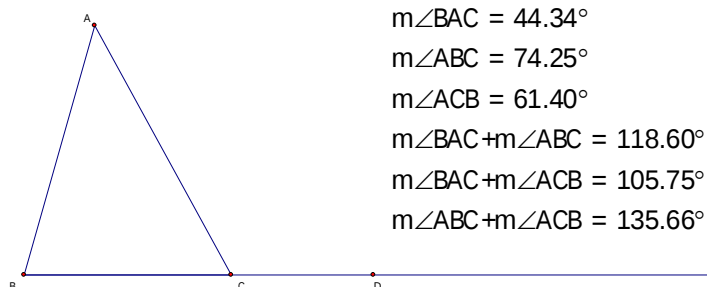
ภาพที่ 4.16 แสดงขนาดของมุมภายใน และมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยม ABC

จากตารางที่ 4.16 และภาพที่ 4.16 แสดงให้เห็นว่าถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะโตกว่ามุมภายในที่อยู่ตรงข้าม

ทฤษฎีบทที่ 17 ผลบวกของมุมภายในสองมุมของรูปสามเหลี่ยม ย่อมน้อยกว่าสองมุมฉาก

ตารางที่ 4.17 ตารางแสดงขนาดของมุมภายใน และผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC

มุมภายใน (องศา)	ผลบวกของมุมภายใน (องศา)
$BAC = 44.34^\circ$	$BAC + ABC = 118.60^\circ$
$ABC = 74.25^\circ$	$BAC + ACB = 105.75^\circ$
$ACB = 61.40^\circ$	$ABC + ACB = 135.66^\circ$



ภาพที่ 4.17 แสดงขนาดของมุมภายใน และผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC

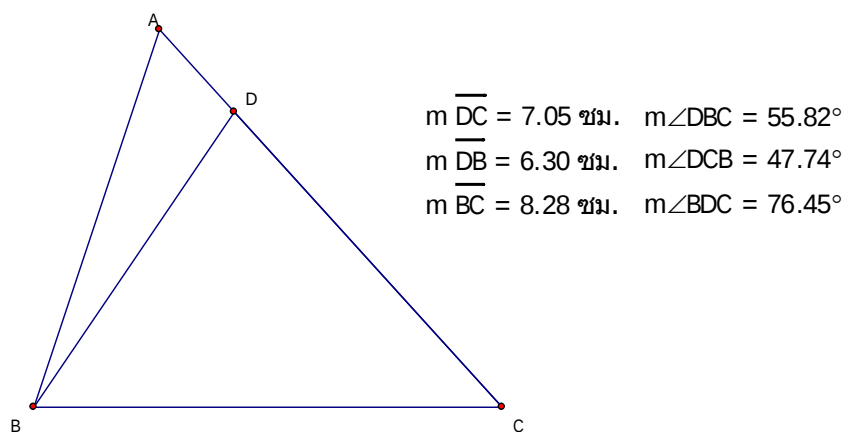
จากตารางที่ 4.17 และภาพที่ 4.17 แสดงให้เห็นว่าผลบวกของมุมภายในสองมุมของรูปสามเหลี่ยม ย่อมน้อยกว่าสองมุมฉาก

■

ทฤษฎีบทที่ 18 รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ด้านที่ยาวย่อมอยู่ตรงข้ามมุมที่ใหญ่กว่า

ตารางที่ 4.18 ตารางแสดงความยาวด้าน และขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม BCD

ความยาวด้าน (ซม.)	ขนาดมุม (องศา)
$\overline{DC} = 7.05$ ซม.	$\angle DBC = 55.82^\circ$
$\overline{DB} = 6.03$ ซม.	$\angle DCB = 47.74^\circ$
$\overline{BC} = 8.28$ ซม.	$\angle BDC = 76.45^\circ$



ภาพที่ 4.18 แสดงความยาวด้าน และขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC

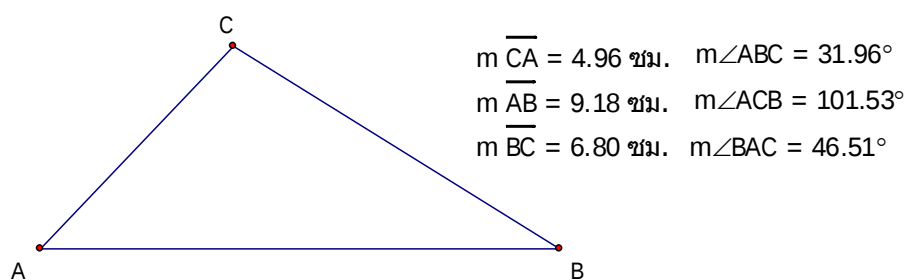
จากตารางที่ 4.18 และภาพที่ 4.18 แสดงให้เห็นว่ารูปสามเหลี่ยมใด ๆ ด้านที่ยาวย่อมอยู่ตรงข้ามมุมที่ใหญ่กว่า

■

ทฤษฎีบทที่ 19 รูปสามเหลี่ยมใด ๆ มุมที่ใหญ่กว่าย่อมอยู่ตรงข้ามด้านที่ยาวกว่า

ตารางที่ 4.19 ตารางแสดงขนาดของมุม และความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC

ขนาดมุม (องศา)	ความยาวด้าน (ซม.)
$ABC = 31.96^\circ$	$\overline{CA} = 31.96$ ซม.
$ACB = 101.53^\circ$	$\overline{AB} = 9.18$ ซม.
$BAC = 46.51^\circ$	$\overline{BC} = 6.80$ ซม.



ภาพที่ 4.19 แสดงขนาดของมุม และความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC

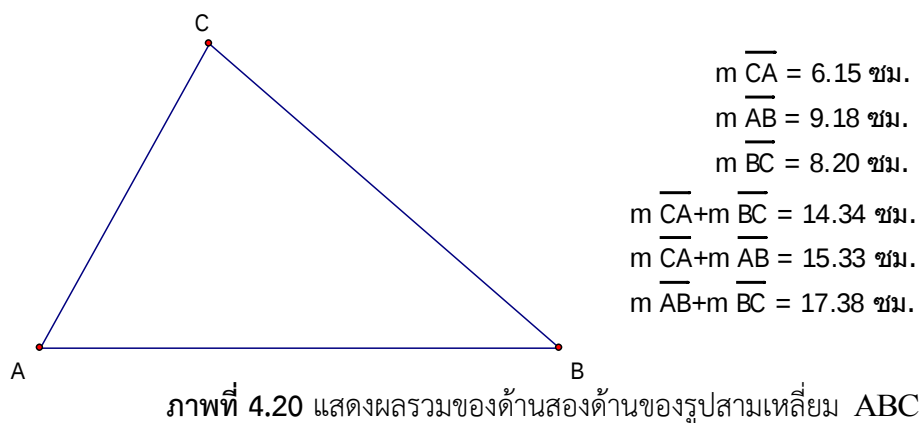
จากตารางที่ 4.19 และภาพที่ 4.19 แสดงให้เห็นว่ารูปสามเหลี่ยมใด ๆ มุมที่ใหญ่กว่าย่อมอยู่ตรงข้ามด้านที่ยาวกว่า

■

ทฤษฎีบทที่ 20 รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ความยาวของด้านสองด้านรวมกันย่อมยาวกว่าด้านที่สาม

ตารางที่ 4.20 ตารางแสดงผลรวมของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC

แสดงผลรวมของด้านสองด้าน (ซม.)	ความยาวด้านที่สาม (ซม.)
$\overline{CA} + \overline{BC} = 14.34$ ซม.	$\overline{AB} = 9.18$ ซม.
$\overline{CA} + \overline{AB} = 15.33$ ซม.	$\overline{BC} = 8.02$ ซม.
$\overline{AB} + \overline{BC} = 17.38$ ซม.	$\overline{CA} = 31.96$ ซม.



จากตารางที่ 4.20 และภาพที่ 4.20 แสดงให้เห็นว่า

$$\overline{CA} + \overline{BC} > \overline{AB}$$

$$\overline{CA} + \overline{AB} > \overline{BC}$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{CA}$$

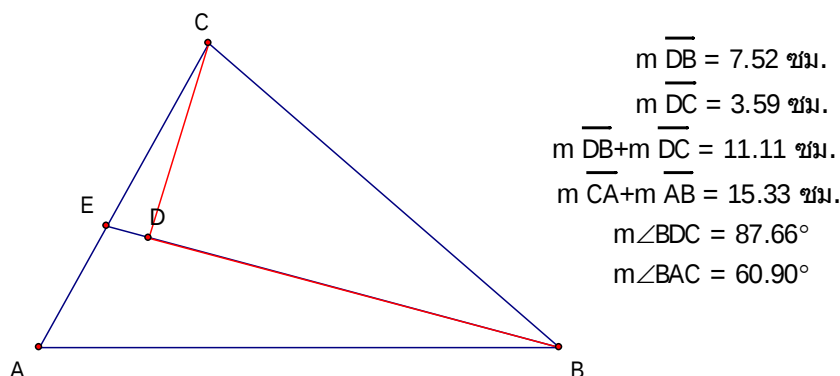
นั่นคือ ความยาวของด้านสองด้านรวมกันย่อมยาวกว่าด้านที่สาม

■

ทฤษฎีบทที่ 21 บนด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม ถ้าสร้างเส้นตรงสองเส้นขนานไปยังสองด้านนี้ไปตัดกันภายในรูปสามเหลี่ยม จะได้ส่วนของเส้นตรงซึ่งทั้งสองดังกล่าวรวมกันย่อมสั้นกว่าผลบวกของด้านทั้งสองที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม แต่มุมที่ประกอบด้านทั้งสองจะโตกว่ามุมที่ประกอบด้วยด้านสองด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม

ตารางที่ 4.21 ตารางแสดงผลรวมของด้านสองด้าน และขนาดของมุมที่ประกอบด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC

แสดงผลรวมของด้านสองด้าน (ซม.)	ขนาดของมุม (องศา)
$\overline{DB} + \overline{DC} = 11.11 \text{ ซม.}$	$BDC = 87.66^\circ$
$\overline{CA} + \overline{AB} = 15.33 \text{ ซม.}$	$BAC = 60.90^\circ$



ภาพที่ 4.21 แสดงผลรวมของด้านสองด้าน และขนาดของมุมที่ประกอบด้าน
ของรูปสามเหลี่ยม ABC

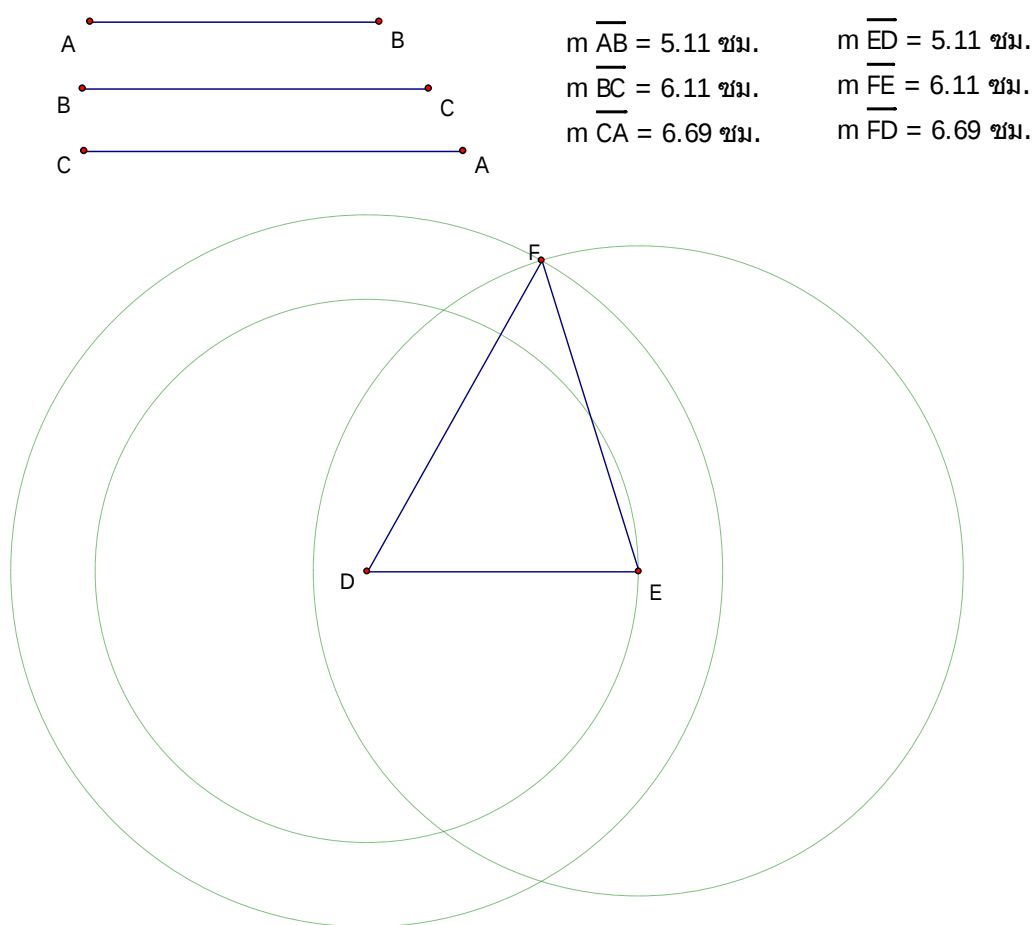
จากตารางที่ 4.21 และภาพที่ 4.21 แสดงให้เห็นว่า $\overline{BD} + \overline{CD} < \overline{AB} + \overline{AC}$ และ $\angle BDC > \angle BAC$ นั่นคือ ถ้าสร้างเส้นตรงสองเส้นบนปลายทั้งสองด้านนี้ไปตัดกันภายในรูปสามเหลี่ยม จะได้ว่าส่วนของเส้นตรงซึ่งทั้งสองดังกล่าวรวมกันย่อมสั้นกว่าผลบวกของด้านทั้งสองที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม แต่มุมที่ประกอบด้านทั้งสองจะโตกว่ามุมที่ประกอบด้วยด้านสองด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม

■

ทฤษฎีบทที่ 22 สามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีด้านยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้สามเส้น โดยเส้นทั้งสามที่กำหนดให้นั้นมีผลรวมความยาวของเส้นใด ๆ ยาวกว่าเส้นที่สาม

ตารางที่ 4.22 ตารางแสดงความยาวของด้านที่กำหนดให้ และความยาวของด้านประกอบของรูปสามเหลี่ยม DEF

ความยาวของด้านที่กำหนดให้ (ซม.)	ความยาวของด้านประกอบของรูปสามเหลี่ยม DEF (ซม.)
$\overline{AB} = 5.11 \text{ ซม.}$	$\overline{ED} = 5.11 \text{ ซม.}$
$\overline{BC} = 6.11 \text{ ซม.}$	$\overline{FE} = 6.11 \text{ ซม.}$
$\overline{CA} = 6.69 \text{ ซม.}$	$\overline{FD} = 6.69 \text{ ซม.}$



ภาพที่ 4.22 แสดงความยาวของด้านที่กำหนดให้ และความยาวของด้านประกอบของรูปสามเหลี่ยม DEF

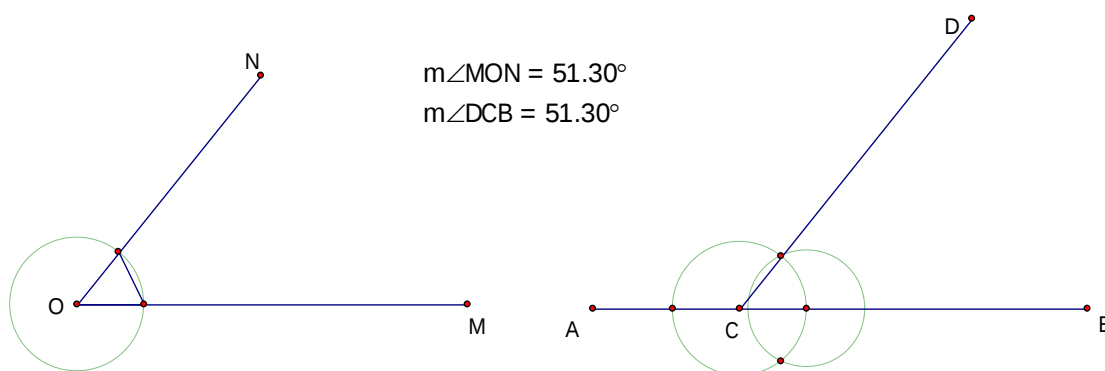
จากตารางที่ 4.22 และภาพที่ 4.22 แสดงให้เห็นว่าสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยม DEF ให้มีความยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$

■

ทฤษฎีบทที่ 23 สามารถสร้างมุมบนส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ ณ จุดที่กำหนดให้ ให้เท่ากับมุมที่กำหนดให้

ตารางที่ 4.23 ตารางแสดงขนาดของมุม MON และขนาดของมุม DCB

มุมกำหนดให้ (องศา)	มุมที่สร้าง (องศา)
$MON = 51.30^\circ$	$DCB = 51.30^\circ$



ภาพที่ 4.23 แสดงขนาดของมุม MON และขนาดของมุม DCB

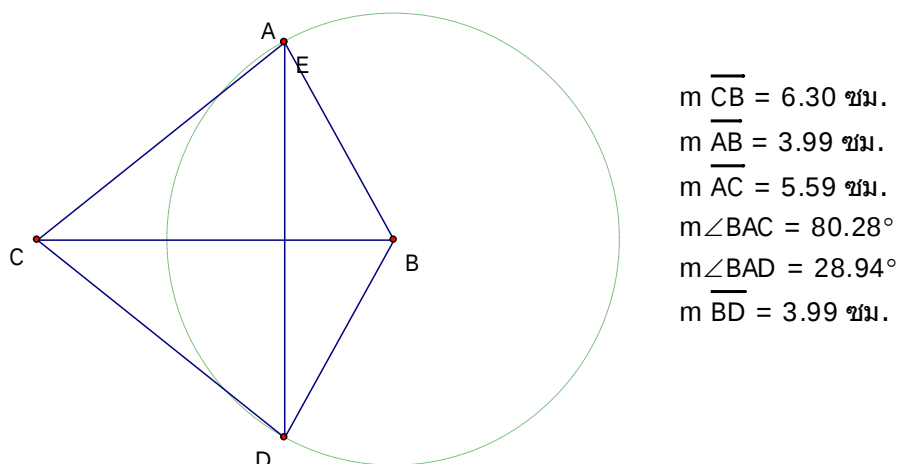
จากตารางที่ 4.23 และภาพที่ 4.23 แสดงให้เห็นว่าสามารถสร้างมุม DCB บนส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ ณ จุด C ให้เท่ากับมุม MON ได้

■

ทฤษฎีบทที่ 24 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสองด้าน ด้านต่อด้าน แต่มุมในระหว่างด้านเท่าไม่เท่ากัน แล้วฐานที่อยู่ตรงข้ามมุมใหญ่จะยาวกว่าฐานที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เล็กกว่า

ตารางที่ 4.24 ตารางแสดงความยาวด้าน และขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม BCD

ความยาวด้าน (ซม.)		ขนาดของมุม (องศา)
รูปสามเหลี่ยม ABC	รูปสามเหลี่ยม BCD	
$\overline{AB} = 3.99$ ซม.	$\overline{BD} = 3.99$ ซม.	$BAC = 80.28^\circ$
$\overline{AC} = 5.99$ ซม.	$\overline{CD} = 5.99$ ซม.	$BAD = 28.94^\circ$



ภาพที่ 4.24 แสดงขนาดของมุม MON และขนาดของมุม DCB

จากตารางที่ 4.24 และภาพที่ 4.24 แสดงให้เห็นว่า $\overline{BC}$ เป็นฐานที่อยู่ตรงข้ามมุมใหญ่ $\overline{BD}$ เป็นที่ฐานอยู่ตรงข้ามมุมที่เล็กกว่า ดังนั้น $\overline{BC} > \overline{BD}$

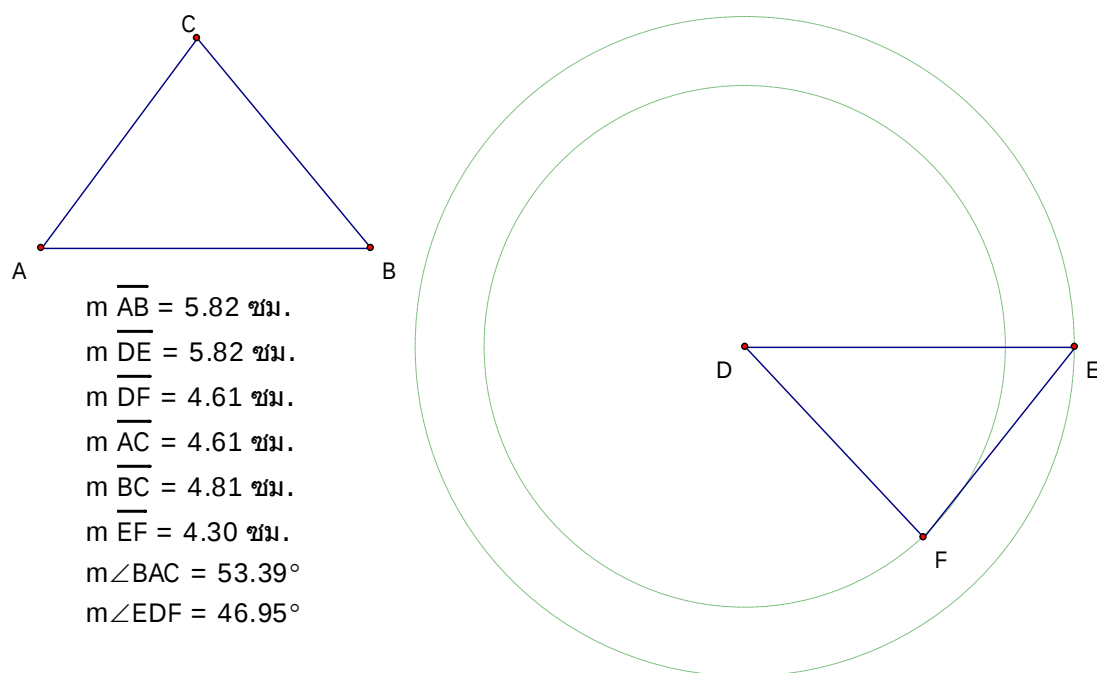
นั่นคือ ฐานที่อยู่ตรงข้ามมุมใหญ่จะยาวกว่าฐานที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เล็กกว่า

■

ทฤษฎีบทที่ 25 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน ด้านต่อด้าน และฐานของรูปหนึ่งยาวกว่าฐานของอีกรูปหนึ่ง จะทำให้มุมที่อยู่ตรงข้ามฐานที่ยาวกว่าโตกว่ามุมที่อยู่ตรงข้ามกับฐานที่สั้นกว่า

ตารางที่ 4.25 ตารางแสดงความยาวด้าน ขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF

รูปสามเหลี่ยม ABC		รูปสามเหลี่ยม BCD	
ความยาวด้าน (ซม.)	ขนาดมุม (องศา)	ความยาวด้าน (ซม.)	ขนาดมุม (องศา)
$\overline{AB} = 5.82 \text{ ซม.}$	$BAC = 53.39^\circ$	$\overline{DE} = 5.82 \text{ ซม.}$	$EDF = 46.95^\circ$
$\overline{AC} = 4.61 \text{ ซม.}$		$\overline{DF} = 4.61 \text{ ซม.}$	
$\overline{BC} = 4.81 \text{ ซม.}$		$\overline{EF} = 4.30 \text{ ซม.}$	



ภาพที่ 4.25 แสดงความยาวด้าน ขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม
ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF

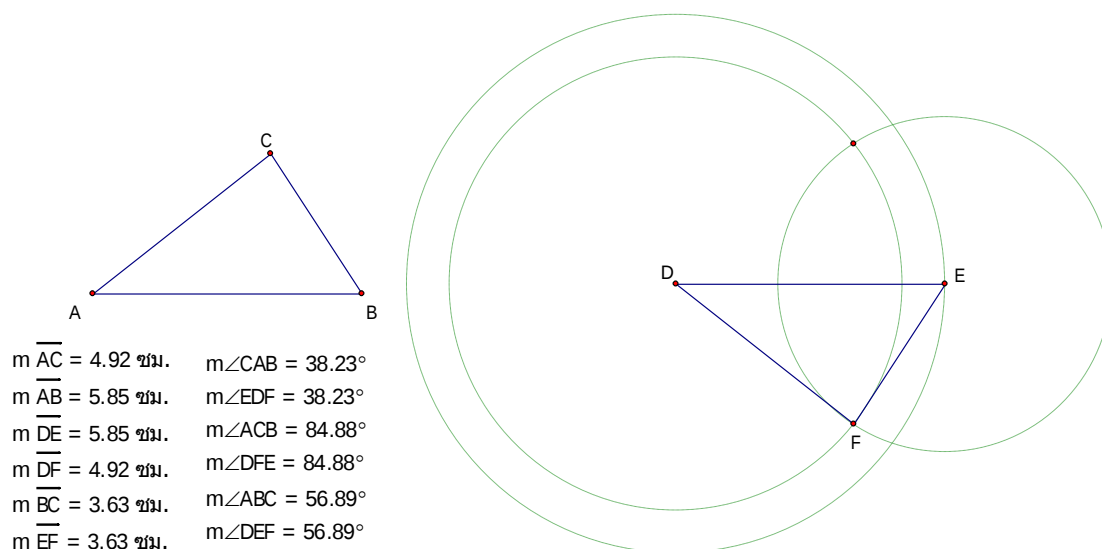
จากตารางที่ 4.25 และภาพที่ 4.25 แสดงให้เห็นว่ามุมที่อยู่ตรงข้ามฐานที่ยาวกว่าโตกว่ามุมที่อยู่ตรงข้ามกับฐานที่สั้นกว่า



ทฤษฎีบทที่ 26 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมเท่ากันสองมุม มุมต่อมุม และมีด้าน ๑
หนึ่งยาวเท่ากัน แล้วด้านที่เหลือย่อมยาวเท่ากัน ด้านต่อด้าน
และมุมที่เหลือจะเท่ากัน

ตารางที่ 4.26 ตารางแสดงความยาวด้าน ขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูป
สามเหลี่ยม DEF

รูปสามเหลี่ยม ABC		รูปสามเหลี่ยม BCD	
ขนาดมุม (องศา)	ความยาวด้าน (ซม.)	ขนาดมุม (องศา)	ความยาวด้าน (ซม.)
$\overline{AB} = 5.85$ ซม.	$CAB = 38.23^\circ$	$\overline{DE} = 5.85$ ซม.	$EDF = 38.23^\circ$
$\overline{AC} = 4.92$ ซม.	$ACB = 84.88^\circ$	$\overline{DF} = 4.92$ ซม.	$DFE = 84.88^\circ$
$\overline{BC} = 3.63$ ซม.	$ABC = 56.89^\circ$	$\overline{EF} = 3.63$ ซม.	$DEF = 56.89^\circ$



ภาพที่ 4.26 แสดงความยาวด้าน ขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF

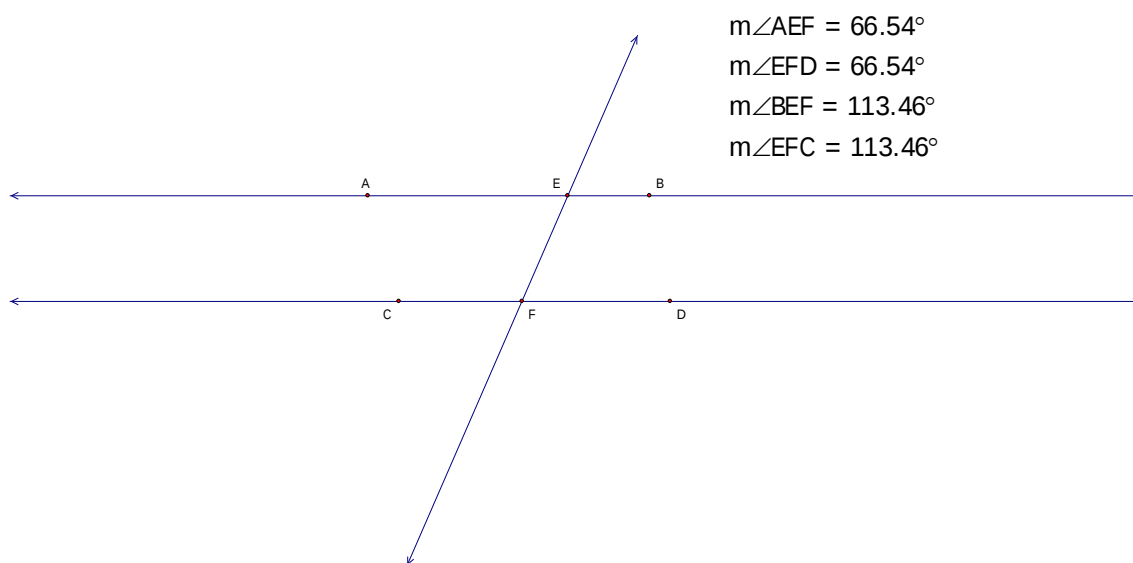
จากตารางที่ 4.26 และภาพที่ 4.26 แสดงให้เห็นว่า $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$, $\angle CAB = \angle EDF$, $\angle ACB = \angle DFE$ และ $\overline{BC} = \overline{EF}$, $\angle ABC = \angle DEF$ นั่นคือ ด้านที่เหลื้อมยาวเท่ากัน ด้านต่อด้าน และมุมที่เหลื้อมจะเท่ากัน

■

ทฤษฎีบทที่ 27 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดกับเส้นตรงสองเส้นทำให้มุมแย้งเท่ากันแล้ว เส้นตรงทั้งสองจะขนานกัน

ตารางที่ 4.27 ตารางแสดงขนาดของมุมแย้ง

ขนาดมุม (องศา)	
มุมที่กำหนดให้ (องศา)	มุมแย้ง (องศา)
$\angle AEF = 66.54^\circ$	$\angle EFD = 66.54^\circ$
$\angle BEF = 113.46^\circ$	$\angle EFC = 113.46^\circ$



ภาพที่ 4.27 แสดงความยาวด้าน ขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC
และรูปสามเหลี่ยม DEF

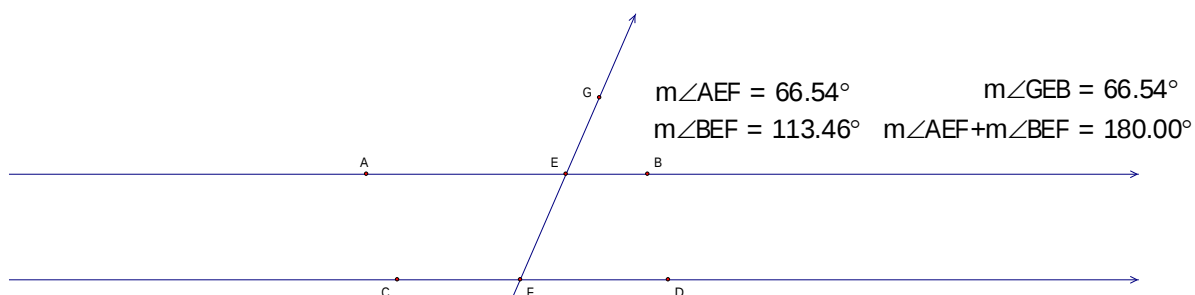
จากตารางที่ 4.27 และภาพที่ 4.27 แสดงให้เห็นว่าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดกับเส้นตรงสองเส้นทำให้มุมแย้งเท่ากัน นั่นคือ เส้นตรง $\overline{AB}$ ขนานกับ เส้นตรง $\overline{CD}$

■

ทฤษฎีบทที่ 28 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดกับเส้นตรงสองเส้นทำให้มุมภายนอกเท่ากับมุมภายใน ซึ่งอยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัด หรือมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับสองมุมฉากแล้ว เส้นตรงทั้งสองจะขนานกัน

ตารางที่ 4.28 ตารางแสดงขนาดของมุมภายในและมุมภายนอก

ขนาดมุม (องศา)	
มุมภายใน (องศา)	มุมภายนอก (องศา)
$\angle AEF = 66.54^\circ$	$\angle GEB = 66.54^\circ$
$\angle BEF = 113.46^\circ$	



ภาพที่ 4.28 แสดงขนาดของมุมภายในและมุมภายนอก

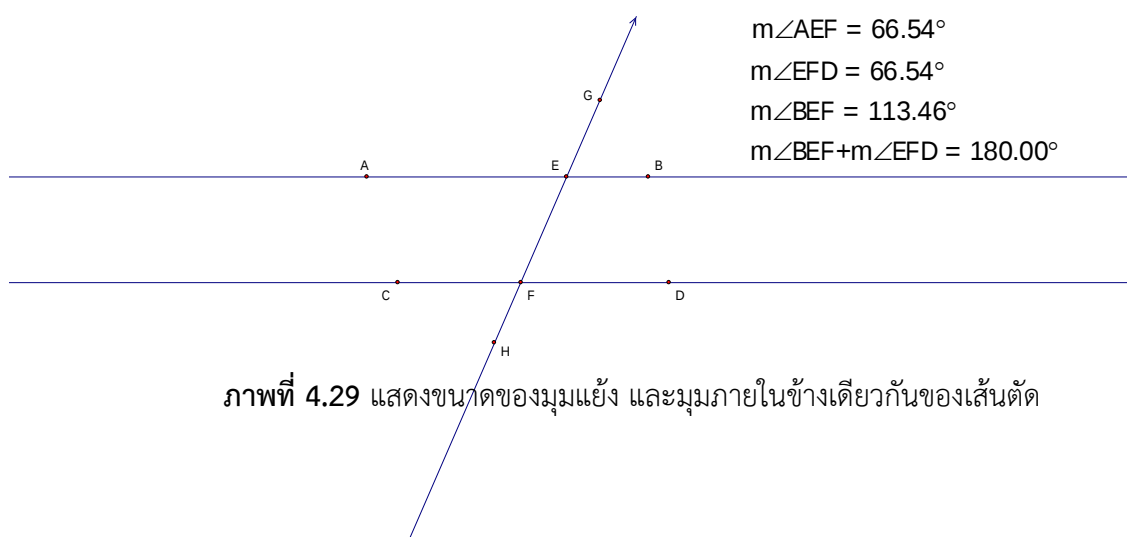
จากตารางที่ 4.28 และภาพที่ 4.28 แสดงให้เห็นว่ามุม $\angle AEF = \angle GEB$ และ $\angle AEF + \angle BEF = 180^\circ$
 ดังนั้น เส้นตรง $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ เส้นตรง $\overleftrightarrow{CD}$

■

ทฤษฎีบทที่ 29 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดกับเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกันแล้ว จะทำให้มุมแย้งเท่ากัน มุมภายนอกเท่ากับมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด และมุมภายในซึ่งอยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก

ตารางที่ 4.29 ตารางแสดงขนาดของมุมแย้ง และมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด

ขนาดมุม (องศา)	
มุมภายใน (องศา)	มุมแย้ง (องศา)
$\angle AEF = 66.54^\circ$	$\angle EFD = 66.54^\circ$
$\angle BEF = 113.46^\circ$	



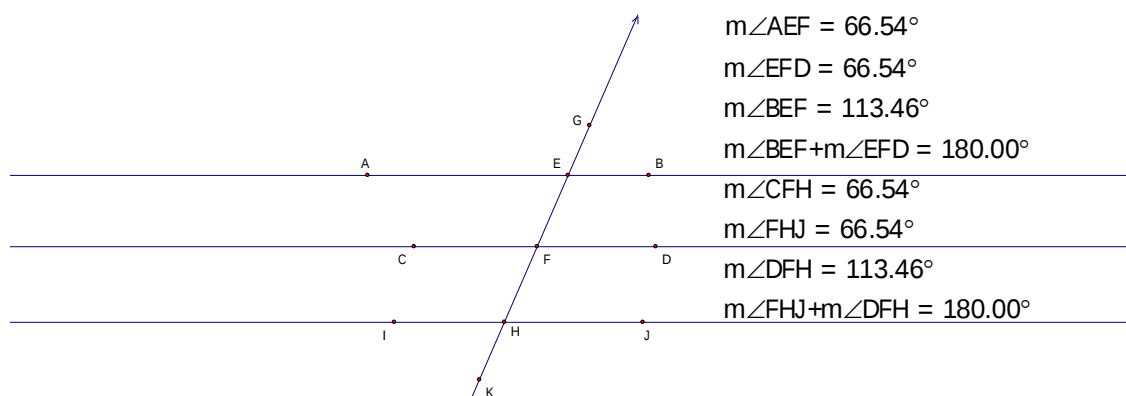
ภาพที่ 4.29 แสดงขนาดของมุมแย้ง และมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด

จากตารางที่ 4.29 และภาพที่ 4.29 แสดงให้เห็นว่ามุมแย้งเท่ากัน มุมภายนอกเท่ากับมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด และมุมภายในซึ่งอยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก

ทฤษฎีบทที่ 30 เส้นตรงทั้งหลายที่ต่างก็ขนานกับเส้นตรงเดียวกันย่อมขนานกัน

ตารางที่ 4.30 ตารางแสดงขนาดของมุมแย้ง และมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด

ขนาดมุม (องศา)	
มุมภายใน (องศา)	มุมแย้ง (องศา)
$\angle AEF = 66.54^\circ$	$\angle EFD = 66.54^\circ$
$\angle BEF = 113.46^\circ$	
$\angle CFH = 66.54^\circ$	$\angle FHJ = 66.54^\circ$
$\angle DFH = 113.46^\circ$	



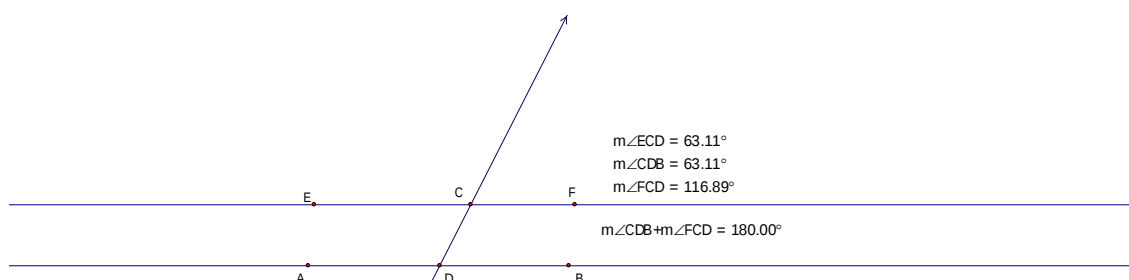
ภาพที่ 4.30 แสดงขนาดของมุมแย้ง และมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด

จากตารางที่ 4.30 และภาพที่ 4.30 แสดงให้เห็นว่าเส้นตรง $\overline{AB}$ ขนานกับเส้นตรง $\overline{CD}$ และเส้นตรง $\overline{CD}$ ขนานกับ เส้นตรง $\overline{IJ}$ ดังนั้น $\overline{AB}$ ขนานกับ เส้นตรง $\overline{IJ}$

ทฤษฎีบทที่ 31 จงลากเส้นตรงผ่านจุดที่กำหนดให้และให้ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้

ตารางที่ 4.31 ตารางแสดงขนาดของมุมแย้ง และมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด

ขนาดมุม (องศา)	
มุมภายใน (องศา)	มุมแย้ง (องศา)
$ECD = 63.11^\circ$	$CDB = 63.11^\circ$
$FCD = 116.89^\circ$	



ภาพที่ 4.31 แสดงขนาดของมุมแย้ง และมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด

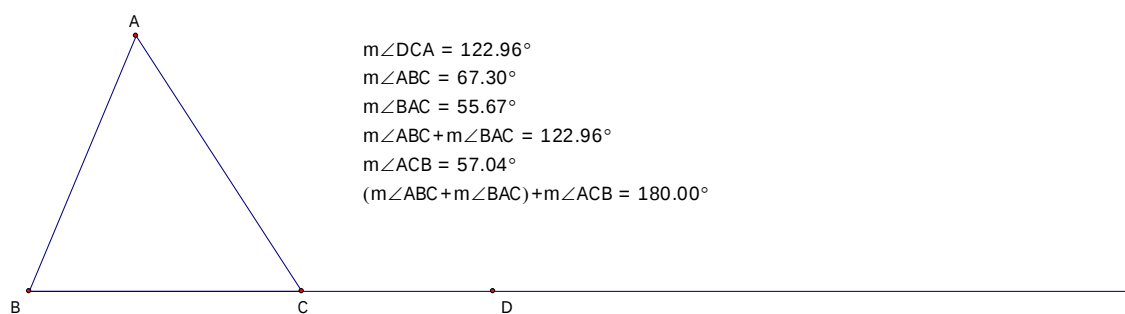
จากตารางที่ 4.31 และภาพที่ 4.31 แสดงให้เห็นว่าสามารถลากเส้นตรง $\overleftrightarrow{EF}$ ผ่านจุด C ที่และขนานกับเส้นตรง $\overleftrightarrow{AB}$

■

ทฤษฎีบทที่ 32 รูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งออกไป มุมภายนอกจะเท่ากับผลรวมของมุมภายในสองมุมที่อยู่ตรงข้าม และมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันจะเท่ากับสองมุมฉาก

ตารางที่ 4.32 ตารางแสดงขนาดของมุมภายนอก และมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC

มุมภายนอก และมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC	
มุมภายนอก (องศา)	มุมภายใน (องศา)
$DCA = 122.96^\circ$	$ABC = 67.30^\circ$
	$BAC = 55.67^\circ$



ภาพที่ 4.32 แสดงขนาดของมุม DCA ซึ่งเป็นมุมภายนอก และมุม ABC , BAC ซึ่งเป็นมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC

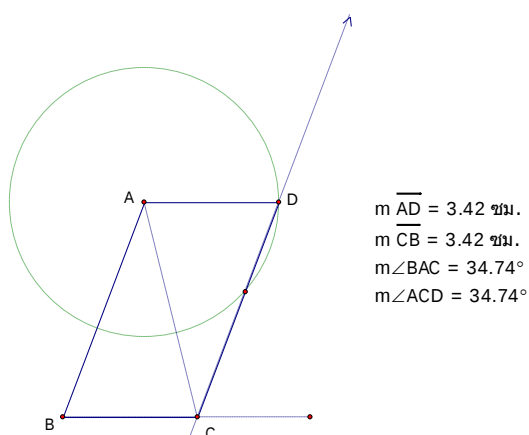
จากตารางที่ 4.32 และภาพที่ 4.32 แสดงให้เห็นว่าผลรวมของมุม $ABC + BAC = DCA$ และผลรวมของมุม $ABC + BAC + ACB = 180^\circ$

■

ทฤษฎีบทที่ 33 ถ้าลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดปลายข้างเดียวกันของส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่ยาวเท่ากัน และ ขนานกันแล้ว เส้นเชื่อมนั้นจะยาวเท่ากัน และขนานกันด้วย

ตารางที่ 4.33 ตารางแสดงความยาวด้าน และมุมภายในที่เกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดปลายข้างเดียวกันของส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่ยาวเท่ากัน และขนานกัน

ความยาวด้าน (ซม.)	มุมภายใน (องศา)
$\overline{AD} = 3.42$ ซม.	$BAC = 34.74^\circ$
$\overline{CB} = 3.42$ ซม.	$ACD = 34.74^\circ$



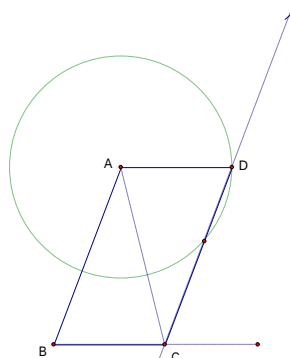
ภาพที่ 4.33 แสดงความยาวด้าน $\overline{AD}$ และด้าน $\overline{BC}$ และขนาดของมุม BAC , ACD

จากตารางที่ 4.33 และภาพที่ 4.33 แสดงให้เห็นว่าด้าน $\overline{AD} = \overline{BC}$ และขนาดของมุม $BAC = ACD$ นั่นคือ เส้นเชื่อมนี้จะยาวเท่ากันและขนานกัน

ทฤษฎีบทที่ 34 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ด้านตรงข้ามจะยาวเท่ากัน มุมตรงข้ามจะเท่ากัน และเส้นทแยงมุมจะแบ่งรูปออกเป็นสองส่วน ๆ กัน

ตารางที่ 4.34 ตารางแสดงความยาวด้าน และขนาดมุม ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD

ความยาวด้าน (ซม.)	มุมภายใน (องศา)
$\overline{AD} = 3.42$ ซม.	$BAC = 34.74^\circ$
$\overline{CB} = 3.42$ ซม.	$ACD = 34.74^\circ$
$\overline{AB} = 5.83$ ซม.	$CDA = 76.00^\circ$
$\overline{DC} = 5.83$ ซม.	$ACB = 76.00^\circ$



$m \overline{AD} = 3.42$ ซม. $m \overline{AB} = 5.83$ ซม.
 $m \overline{CB} = 3.42$ ซม. $m \overline{DC} = 5.83$ ซม.
 $m \angle BAC = 34.74^\circ$ $m \angle CAD = 76.00^\circ$
 $m \angle ACD = 34.74^\circ$ $m \angle ACB = 76.00^\circ$

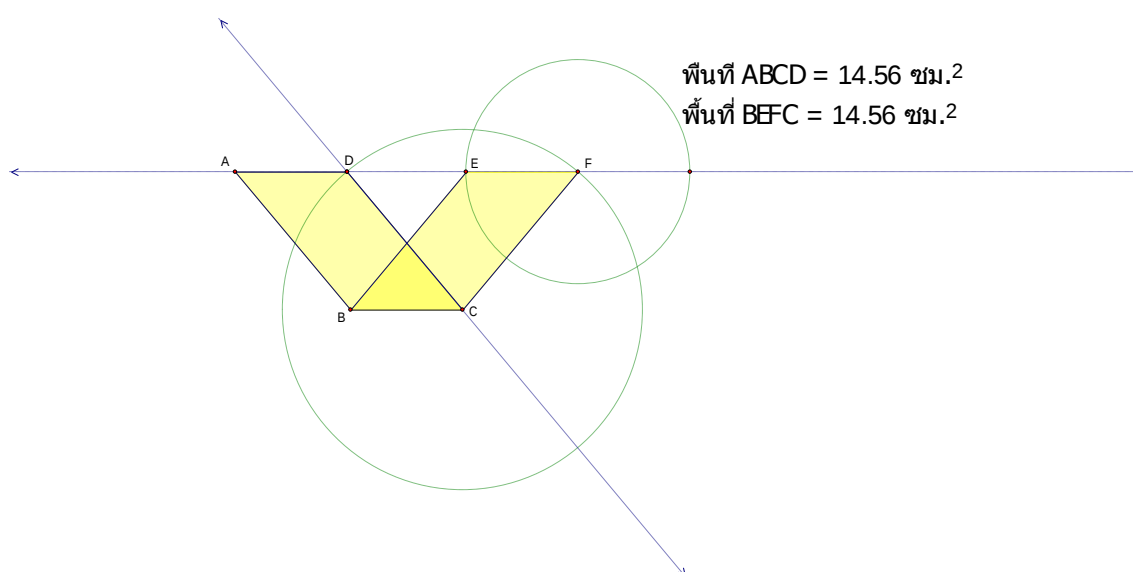
ภาพที่ 4.34 แสดงความยาวด้าน และขนาดมุม ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD

จากตารางที่ 4.34 และภาพที่ 4.34 แสดงให้เห็นว่าด้าน $\overline{AD} = \overline{BC}$ ด้าน $\overline{AB} = \overline{DC}$ และขนาดของมุม $BAC = ACD$ และมุม $CAD = ACB$ นั่นคือ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ด้านตรงข้ามจะยาวเท่ากัน มุมตรงข้ามจะเท่ากัน และเส้นทแยงมุมจะแบ่งรูปออกเป็นสองส่วน ๆ กัน

ทฤษฎีบทที่ 35 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่อยู่บนฐานเดียวกันและด้านบนอยู่บนเส้นขนานกับฐานเส้นเดียวกันแล้ว จะมีพื้นที่เท่ากัน

ตารางที่ 4.35 ตารางแสดงพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD และรูปสี่เหลี่ยม BEFC

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD (ชม. ²)	พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม BEFC (ชม. ²)
พื้นที่ ABCD = 14.56 ชม. ² .	พื้นที่ BEFC = 14.56 ชม. ² .



ภาพที่ 4.35 แสดงพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD และรูปสี่เหลี่ยม BEFC

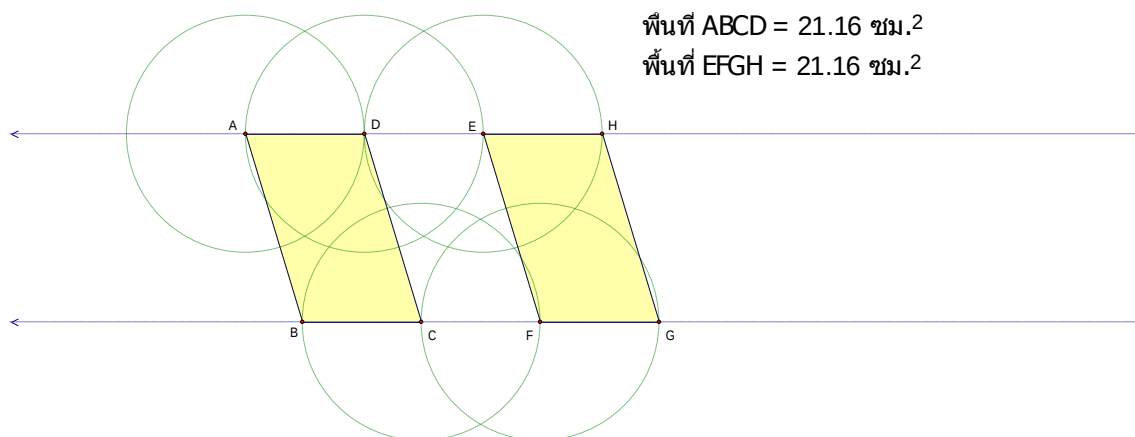
จากตารางที่ 4.35 และภาพที่ 4.35 แสดงให้เห็นว่ารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD และรูปสี่เหลี่ยม BEFC อยู่บนฐานเดียวกันและด้านบนอยู่บนเส้นขนานกับฐานเส้นเดียวกันมีพื้นที่เท่ากัน

■

ทฤษฎีบทที่ 36 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีฐานยาวเท่ากัน และมีด้านตรงข้ามกับด้านฐานอยู่บนเส้นขนานคู่เดียวกันจะมีพื้นที่เท่ากัน

ตารางที่ 4.36 ตารางแสดงพื้นที่ ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD และรูปสี่เหลี่ยม EFGH

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD (ชม. ²)	พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม EFGH (ชม. ²)
พื้นที่ ABCD = 21.16 ชม. ² .	พื้นที่ BEFC = 21.16 ชม. ² .



ภาพที่ 4.36 แสดงพื้นที่ ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD และรูปสี่เหลี่ยม EFGH

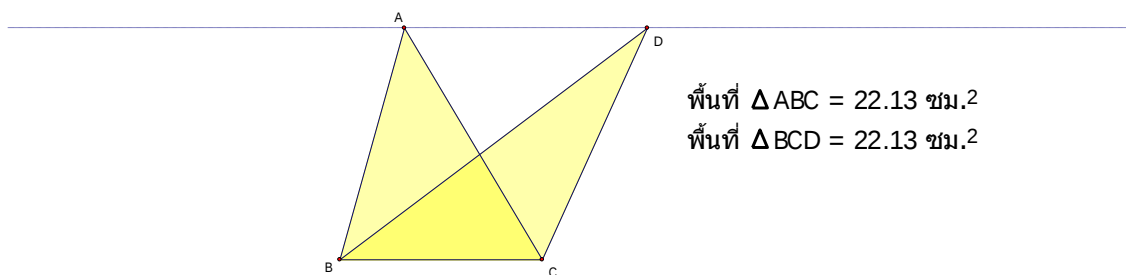
จากตารางที่ 4.36 และภาพที่ 4.36 แสดงให้เห็นว่ารูปสี่เหลี่ยม ABCD และรูปสี่เหลี่ยม EFGH มีพื้นที่เท่ากัน

■

ทฤษฎีบทที่ 37 รูปสามเหลี่ยมที่มีฐานเดียวกัน และจุดยอดกับฐานอยู่บนเส้นขนานคู่เดียวกัน จะมีพื้นที่เท่ากัน

ตารางที่ 4.37 ตารางแสดงพื้นที่ ของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม BCD

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC (ซม. ² .)	พื้นที่รูปสามเหลี่ยม BCD (ซม. ² .)
พื้นที่ ABC = 22.13 ซม. ² .	พื้นที่ BCD = 22.13 ซม. ² .



ภาพที่ 4.37 แสดงความยาวด้าน และขนาดมุม ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD

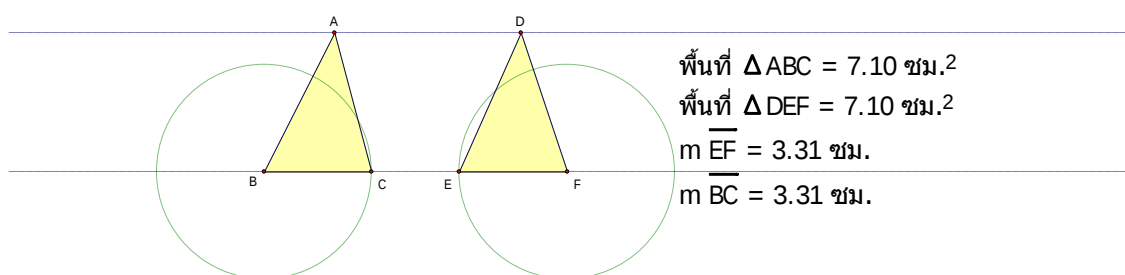
จากตารางที่ 4.37 และภาพที่ 4.37 แสดงให้เห็นว่ารูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม BCD มีฐานเดียวกัน และจุดยอดกับฐานอยู่บนเส้นขนานคู่เดียวกันมีพื้นที่เท่ากัน

■

ทฤษฎีบทที่ 38 รูปสามเหลี่ยมที่มีฐานยาวเท่ากัน และจุดยอดกับฐานอยู่บนเส้นขนานคู่เดียวกัน จะมีพื้นที่เท่ากัน

ตารางที่ 4.38 ตารางแสดงความยาวฐาน และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF

ความยาวฐาน (ซม.)		พื้นที่รูปสามเหลี่ยม (ซม. ²)	
ABC	DEF	ABC	DEF
$\overline{EF} = 3.31$ ซม.	$\overline{EF} = 3.31$ ซม.	7.10 ซม. ² .	7.10 ซม. ² .



ภาพที่ 4.38 แสดงความยาวด้าน และขนาดมุม ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD

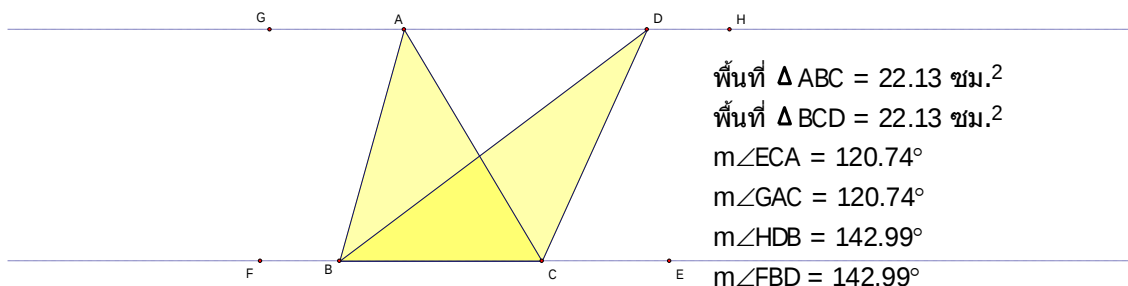
จากตารางที่ 4.38 และภาพที่ 4.38 แสดงให้เห็นว่ารูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF มีความยาวฐานเท่ากันและมีพื้นที่เท่ากัน

■

ทฤษฎีบทที่ 39 รูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่เท่ากัน และอยู่บนฐานเดียวกัน โดยจุดยอดอยู่ข้างเดียวกันของฐานแล้ว จุดยอดทั้งสองจะอยู่บนเส้นที่ขนานกับฐาน

ตารางที่ 4.39 ตารางแสดงพื้นที่ และมุมแย้ง ของรูปสี่เหลี่ยม ABC และรูปสี่เหลี่ยม BCD ที่มีจุดยอดอยู่บนเส้นตรง $\overline{GH}$

รูปสามเหลี่ยม ABC		รูปสามเหลี่ยม BCD	
พื้นที่ (ซม. ²)	มุมแย้ง (องศา)	พื้นที่ (ซม. ²)	มุมแย้ง (องศา)
$ABC = 22.13$ ซม. ² .	$ECA = GAC$	$BCD = 22.13$ ซม. ² .	$HBD = FBD$



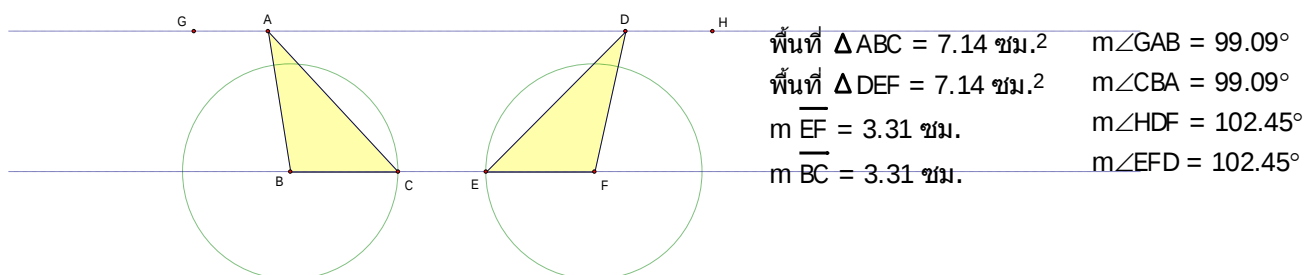
ภาพที่ 4.39 แสดงพื้นที่ และมุมแย้ง ของรูปสี่เหลี่ยม ABC และรูปสี่เหลี่ยม BCD ที่มีจุดยอดอยู่บนเส้นตรง $\overline{GH}$

จากตารางที่ 4.39 และภาพที่ 4.39 แสดงให้เห็นว่าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABC เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม BCD และมีมุมแย้ง $ECA = GAC$, $HBD = FBD$ นั่นคือรูปสี่เหลี่ยม ABC และรูปสี่เหลี่ยมมีจุดยอดอยู่บนเส้นตรง $\overline{GH}$

ทฤษฎีบทที่ 40 รูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่เท่ากัน ฐานยาวเท่ากัน และฐานอยู่บนเส้นเดียวกัน โดยจุดยอดอยู่ข้างเดียวกันของฐานแล้ว จุดยอดทั้งสองจะอยู่บนเส้นที่ขนานกับฐาน

ตารางที่ 4.40 ตารางแสดงพื้นที่ ความยาวฐาน และมุมแย้ง ของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF

รูปสามเหลี่ยม ABC			รูปสามเหลี่ยม BCD		
พื้นที่ (ซม. ²)	ฐาน (ซม.)	มุมแย้ง (องศา)	พื้นที่ (ซม. ²)	ฐาน (ซม.)	มุมแย้ง (องศา)
7.14 ซม. ²	3.31 ซม.	$GAB = CBA$	7.14 ซม. ²	3.31 ซม.	$HDF = EFD$



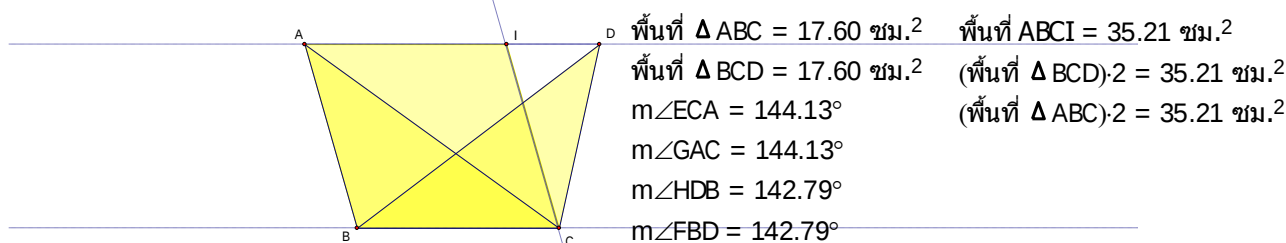
ภาพที่ 4.40 แสดงความยาวด้าน และขนาดมุม ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD

จากตารางที่ 4.40 และภาพที่ 4.40 แสดงให้เห็นว่ารูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF มีพื้นที่ และฐานยาวเท่ากัน โดยมีจุดยอดอยู่บนเส้นตรง $\overline{GH}$ โดยพบว่ามุม $GAB = CBA$ และมุม $HDF = EFD$ ซึ่งเป็นมุมแย้ง ดังนั้น จุด A และจุด D อยู่บนเส้นที่ขนานกับฐาน

ทฤษฎีบทที่ 41 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีฐานเดียวกับรูปสามเหลี่ยม ซึ่งจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม และด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานอยู่บนเส้นเดียวกันที่ขนานกับฐาน รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะมีพื้นที่เป็นสองเท่าของรูปสามเหลี่ยม

ตารางที่ 4.41 ตารางแสดงพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABD รูปสามเหลี่ยม BCD และรูปสี่เหลี่ยม ABCI

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม		พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม
ABD (ซม. ²)	BCD (ซม. ²)	ABCI (ซม. ²)
17.60 ซม. ² .	17.60 ซม. ² .	35.21 ซม. ² .



ภาพที่ 4.41 แสดงพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABD รูปสามเหลี่ยม BCD และรูปสี่เหลี่ยม ABCI

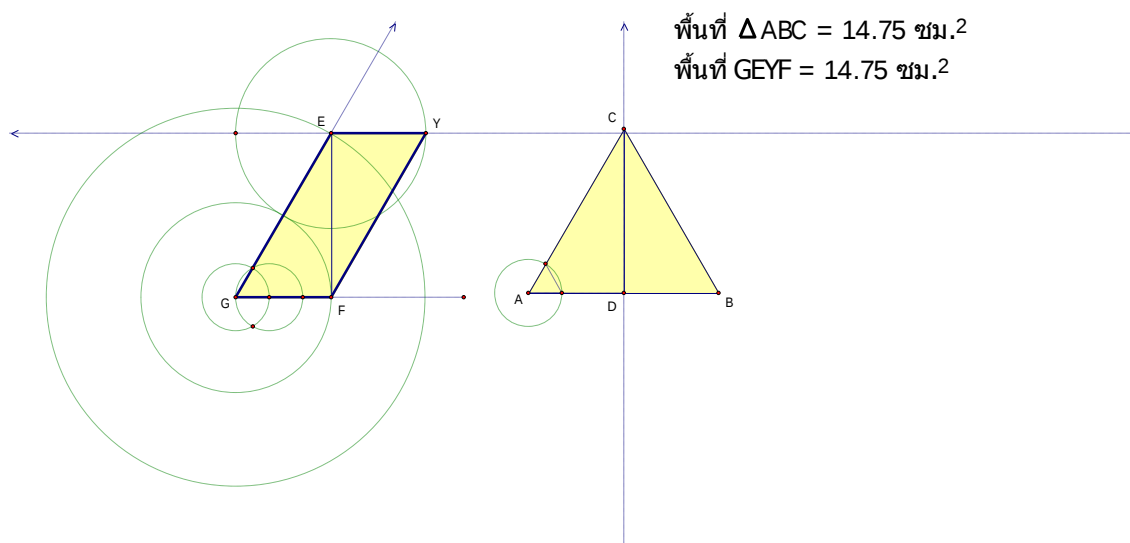
จากตารางที่ 4.41 และภาพที่ 4.41 แสดงให้เห็นว่ารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCI มีฐานเดียวกับรูปสามเหลี่ยม ABD รูปสามเหลี่ยม BCD ซึ่งจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม และด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานอยู่บนเส้นเดียวกันที่ขนานกับฐาน พบว่ารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCI มีพื้นที่เป็นสองเท่าของรูปสามเหลี่ยม ABD รูปสามเหลี่ยม BCD

■

ทฤษฎีบทที่ 42 สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุม ๆ หนึ่งเท่ากับมุมที่กำหนดให้ และมีพื้นที่เท่ากับรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้

ตารางที่ 4.42 ตารางแสดงพื้นที่ ของรูปสี่เหลี่ยม GEYF และพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม GEYF (ซม. ²)	พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC (ซม. ²)
14.75 ซม. ² .	14.75 ซม. ² .



ภาพที่ 4.42 แสดงพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม GEYF และพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC

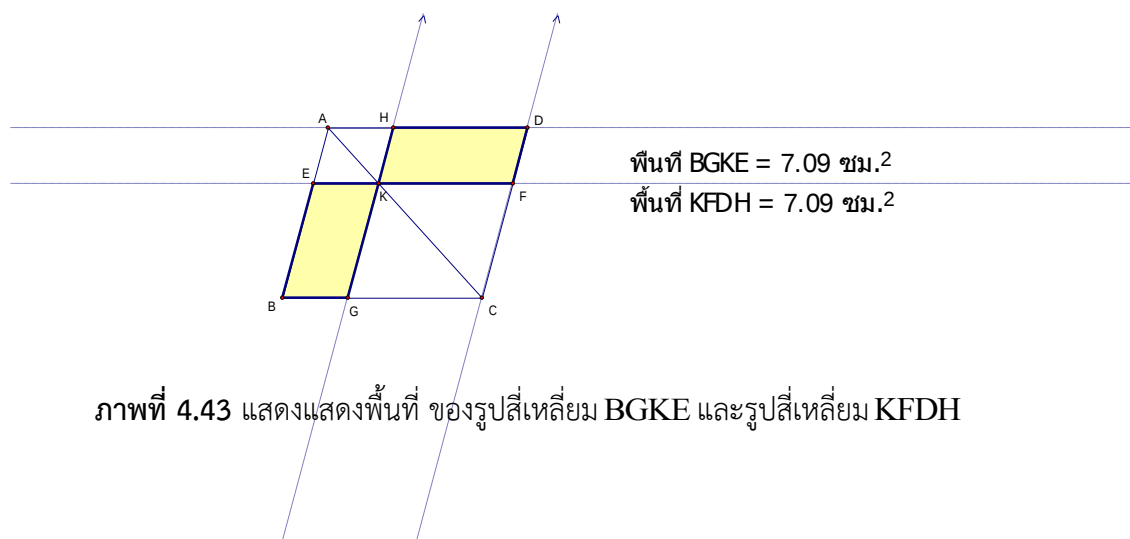
จากตารางที่ 4.42 และภาพที่ 4.42 แสดงให้เห็นว่าสามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยม GEYF ให้มีเท่าพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC

■

ทฤษฎีบทที่ 43 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานใด ๆ ถ้าลากเส้นผ่านจุดใด ๆ บนเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่งให้ขนานกับด้านสองด้าน จะได้รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานสี่รูป ซึ่งสองรูปที่เส้นทแยงมุมเส้นนั้นไม่แบ่งเป็นสองส่วนเท่ากัน จะมีพื้นที่เท่ากัน

ตารางที่ 4.43 ตารางแสดงพื้นที่ ของรูปสี่เหลี่ยม BGKE และรูปสี่เหลี่ยม KFDH

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม BGKE (ซม. ²)	พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม KFDH (ซม. ²)
7.09 ซม. ² .	7.09 ซม. ² .



ภาพที่ 4.43 แสดงแสดงพื้นที่ ของรูปสี่เหลี่ยม BGKE และรูปสี่เหลี่ยม KFDH

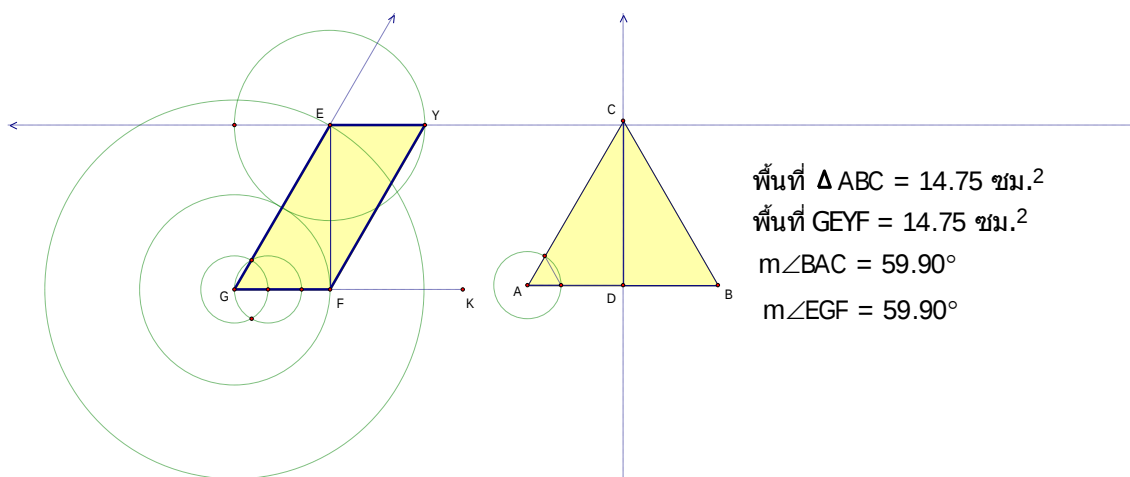
จากตารางที่ 4.43 และภาพที่ 4.43 แสดงให้เห็นว่ารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ เมื่อลากเส้นผ่านจุดใด ๆ บนเส้นทแยงมุมเส้น $\overline{AC}$ ให้ขนานกับด้าน $\overline{AB}$ และด้าน $\overline{CD}$ จะได้รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $AEKH$ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $BGKE$ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $KFDH$ และรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $GCKF$ ซึ่งพบว่า พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $BGKE$ เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $KFDH$

■

ทฤษฎีบทที่ 44 สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานบนส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ และมีมุมหนึ่งเท่ากับมุมที่กำหนดให้ และมีพื้นที่เท่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้

ตารางที่ 4.44 ตารางแสดงพื้นที่ที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $GEYF$ พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC และขนาดมุม BAC ของรูปสามเหลี่ยม ABC ขนาดมุม EGF ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $GEYF$

พื้นที่ (ซม. ²)	มุม (องศา)
$ABC = 14.75 \text{ ซม.}^2$	$BAC = 59.90^\circ$
$GEYF = 14.75 \text{ ซม.}^2$	$EGF = 59.90^\circ$



ภาพที่ 4.44 แสดงพื้นที่ที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $GEYF$ พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC และขนาดมุม BAC ของรูปสามเหลี่ยม ABC ขนาดมุม EGF ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $GEYF$

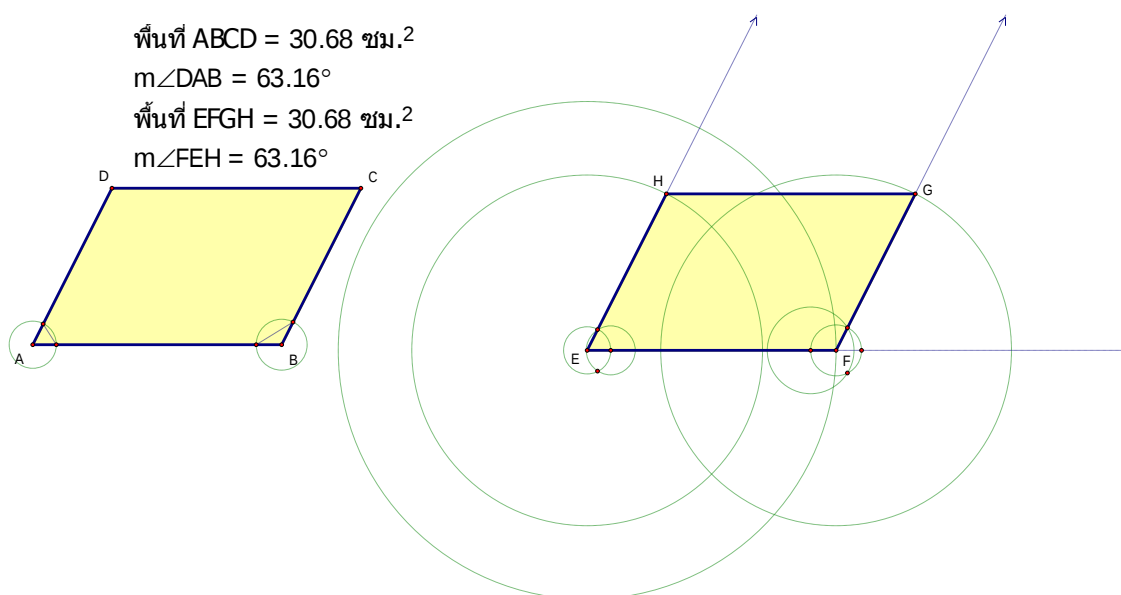
จากตารางที่ 4.44 และภาพที่ 4.44 แสดงให้เห็นว่าพื้นที่ที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $GEYF$ เท่ากับพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC และขนาดมุม BAC ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับขนาดมุม

EGF ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน GEYF นั่นคือ สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน GEYF บนส่วนของเส้นตรง $\overline{GK}$ และมีมุม EGF เท่ากับมุม BAC ที่กำหนดให้ และมีพื้นที่เท่ารูปสามเหลี่ยม ABC

ทฤษฎีบทที่ 45 สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ให้มีมุมเท่ากับมุมที่กำหนดให้มุมหนึ่ง และมีพื้นที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งที่กำหนดให้

ตารางที่ 4.45 ตารางแสดงขนาดมุม DAB ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD ขนาดมุม FEH ของรูปสี่เหลี่ยม EFGH พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม EFGH

มุม (องศา)	พื้นที่ (ซม. ²)
DAB = 63.16°	ABCD = 30.68 ซม. ² .
FEH = 34.74°	EFGH = 30.68 ซม. ² .



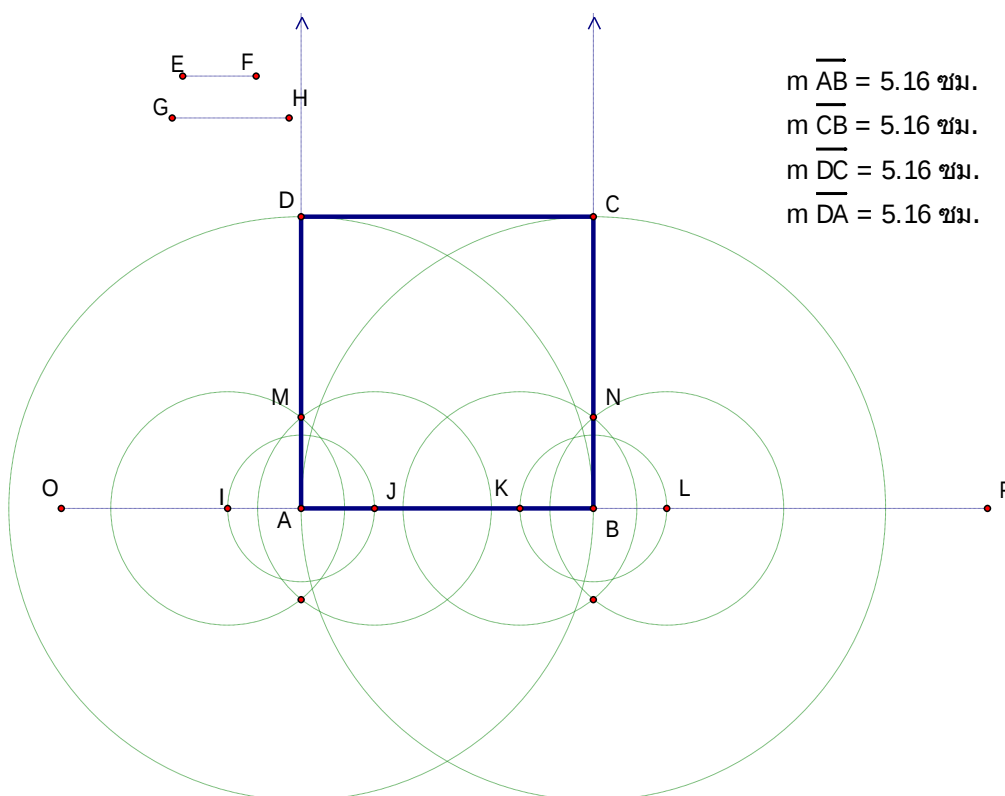
ภาพที่ 4.45 แสดงขนาดมุม DAB ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD ขนาดมุม FEH ของรูปสี่เหลี่ยม EFGH พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม EFGH

จากตารางที่ 4.45 และภาพที่ 4.45 แสดงให้เห็นว่าขนาดมุม DAB ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับขนาดมุม FEH ของรูปสี่เหลี่ยม EFGH และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม EFGH นั่นคือ สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน EFGH ให้มีมุมเท่ากับมุม DAB และมีพื้นที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยม ABCD

ทฤษฎีบทที่ 46 สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

ตารางที่ 4.46 ตารางแสดงความยาวด้าน ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD

ความยาวด้าน (ซม.)	ความยาวด้าน (ซม.)
$\overline{AB} = 5.16$ ซม.	$\overline{AC} = 5.16$ ซม.
$\overline{BC} = 5.16$ ซม.	$\overline{DC} = 5.16$ ซม.



ภาพที่ 4.46 แสดงความยาวด้าน ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD

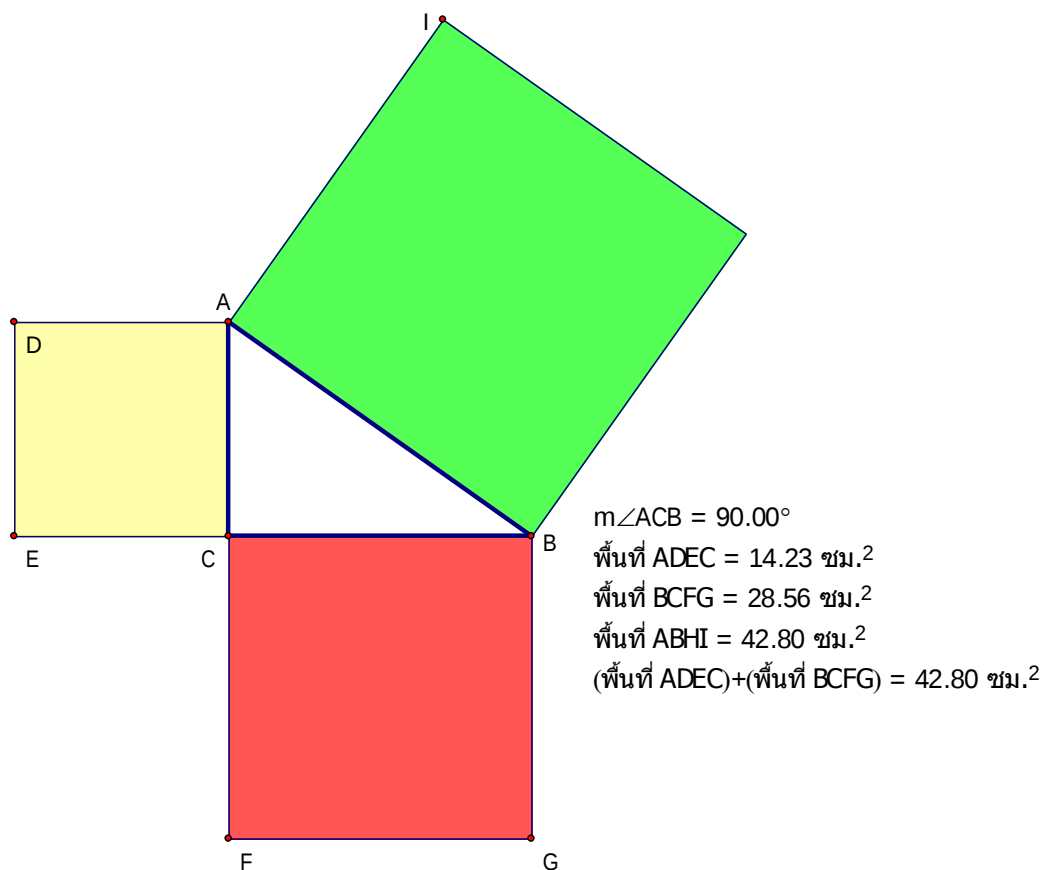
จากตารางที่ 4.46 และภาพที่ 4.46 แสดงให้เห็นว่าสามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD บนส่วนของเส้นตรง $\overline{OP}$ ได้



ทฤษฎีบทที่ 47 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ จัตูรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากจะมีพื้นที่ เท่ากับ ผลบวกของจัตูรัสบนด้านประกอบมุมฉาก

ตารางที่ 4.47 ตารางแสดงพื้นที่ของจัตูรัสบนด้านประกอบมุมฉาก พื้นที่ของจัตูรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

พื้นที่ (ซม. ²)	มุม (องศา)
ADEC = 14.23 ซม. ² .	ACB = 90.00°
BCFG = 28.56 ซม. ² .	
ABHI = 42.80 ซม. ² .	
ADEC + BCFG = 42.80 ซม. ² .	



ภาพที่ 4.47 แสดงพื้นที่ของจัตูรัสบนด้านประกอบมุมฉาก พื้นที่ของจัตูรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

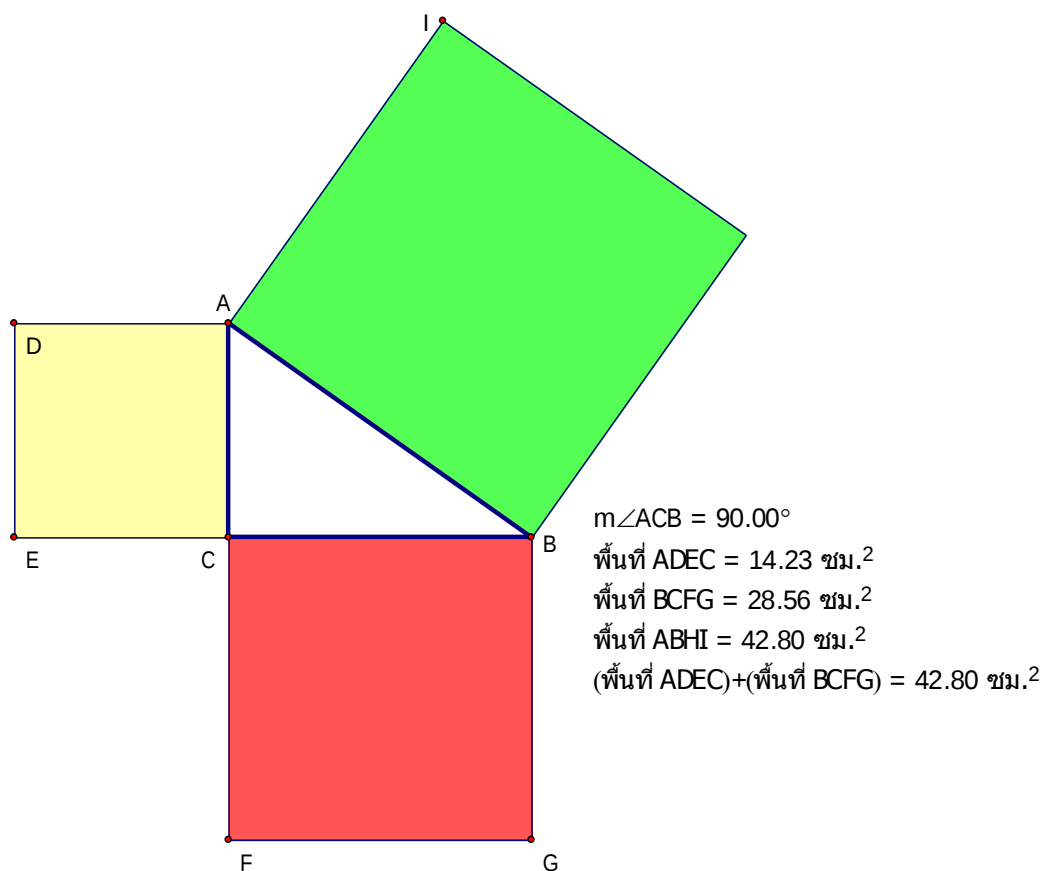
จากตารางที่ 4.47 และภาพที่ 4.47 แสดงให้เห็นว่าพื้นที่ของจัตูรัส ADEC, BCFG ที่อยู่บนด้านประกอบมุมฉาก ACB พบว่าพื้นที่ของจัตูรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก ABHI พื้นที่ เท่ากับ

ผลบวกของจัตุรัส ADEC กับ BCFG ซึ่งเป็นจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

ทฤษฎีบทที่ 48 รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้าจัตุรัสบนด้าน ๆ ด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม เท่ากับ ผลบวกของจัตุรัสบนด้านที่เหลือแล้ว มุมที่ประกอบด้านที่เหลือ นั้นจะเป็นมุมฉาก

ตารางที่ 4.48 ตารางแสดงพื้นที่ของจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก พื้นที่ของจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

พื้นที่ (ซม. ²)	มุม (องศา)
ADEC = 14.23 ซม. ² .	ACB = 90.00°
BCFG = 28.56 ซม. ² .	
ABHI = 42.80 ซม. ² .	
ADEC + BCFG = 42.80 ซม. ² .	



ภาพที่ 4.48 แสดงพื้นที่ของจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก พื้นที่ของจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

จากตารางที่ 4.48 และภาพที่ 4.48 แสดงให้เห็นว่าจัตุรัส ABHI มีพื้นที่ เท่ากับ ผลบวกของ จัตุรัส ADEC กับ BCFG ดังนั้น มุม ACB ที่ประกอบด้าน $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ เป็นมุมฉาก

4.2 ร้อยละของนักศึกษาที่พิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

ผู้เรียนที่สามารถสร้างรูปเรขาคณิต เพื่ออธิบายการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของ ยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad จะแสดงดังตาราง ต่อไปนี้

ตาราง 4.1 ตารางแสดงจำนวนผู้เรียนที่สามารถสร้างรูปเรขาคณิต เพื่ออธิบายการพิสูจน์ทฤษฎีบท เรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

ลำดับที่	ชื่อ - สกุล	จำนวนผู้เรียนที่สามารถแสดง พิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตใน ระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม GSP	
		ได้	ไม่ได้
1	นางสาวนัตยา จงไพศาล	✓	-
2	นางสาวอัมรา แก้วเสน	✓	-
3	นางสาวดวงใจ จันจอม	✓	-
4	นางสาวสุนิสา มาดี	✓	-
5	นางสาวพิชญ์สุนันท์ วงศ์ษา	✓	-
6	นางสาวสุภาวรรณ พันธุ์เพ็ง	✓	-
7	นางสาวปิยนุช ไ้ม้ลา	✓	-
8	นางสาววาสนา นิลสนธิ	✓	-
9	นางสาวสรินนา ขวัญสูตร	✓	-
10	นางสาวกชมน สิทธิประสงค์	✓	-
11	นางสาวกนกวรรณ กองเกิน	✓	-
12	นางสาวระวีวรรณ ฤทธิ์เนติกุล	✓	-
13	นางสาวประภาพร ไช้ทอง	✓	-
14	นางสาวดลยา เศรษฐสิงห์	✓	-
15	นางสาวนภัสสร อ่อนพรม	✓	-

ลำดับที่	ชื่อ - สกุล	จำนวนผู้เรียนที่สามารถแสดง พินิจทัศนคติเกี่ยวกับบทบาทใน ระนาบของยุคโลก ด้วยโปรแกรม GSP	
		ได้	ไม่ได้
16	นางสาวสุกัญญา พาคำ	✓	-
17	นางสาวพรชนก พณิชีพ	✓	-
รวม		17.00	0.00
ร้อยละ		100.00	0.00

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย และอภิปรายผล

จากการศึกษาการสร้างชุดการฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เพื่อฝึกการสร้างรูปเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด อีกทั้งยังทำให้ผู้เรียนสามารถใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สำหรับการฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด และเกิดการเปลี่ยนมุมมองการคิด สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิต จากนามธรรมเป็นรูปธรรม มีการสรุปผลการวิจัย เป็นดังนี้

5.1 สรุปผลสร้างรูปเรขาคณิต เพื่อแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

ทฤษฎีบทที่ 1 สามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าบนส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า การใช้จุด A และจุด B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีวงกลมยาวเท่ากับความยาวด้าน AB ทำให้เกิดด้าน AC และด้าน BC ที่ความยาวเท่ากับด้าน AB ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า ความยาวด้าน $AB = AC = BC$ นั่นคือ รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ทฤษฎีบทที่ 2 สามารถสร้างส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดที่กำหนดให้ ให้ยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า สามารถสร้าง $\overline{AL}$ ให้มีความยาวเท่ากับ $\overline{BC}$ นั่นคือ สามารถสร้างส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดที่กำหนดให้ ให้ยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

ทฤษฎีบทที่ 3 กำหนดส่วนของเส้นตรงที่ยาวไม่เท่ากันสองเส้น สามารถตัดส่วนของเส้นตรงที่ยาวให้เท่ากับเส้นสั้น

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า สามารถตัดส่วนของเส้นตรง $\overline{AE}$ จากส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ ให้มีความยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรงที่ยาว c หน่วย

ทฤษฎีบทที่ 4 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสองด้าน ด้านต่อด้านและมีมุมในระหว่างด้านเท่า เท่ากันแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะมีด้านและมุมที่เหลือเท่ากัน (รูปสามเหลี่ยมทั้งสองเท่ากันทุกประการ)

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า $\overline{BC} = \overline{EF}$, $\angle ABC = \angle DEF$ และ $\angle ACB = \angle DFE$ นั่นคือ รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการ

ทฤษฎีบทที่ 5 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ย่อมมีมุมที่ฐานเท่ากัน และถ้าต่อด้านที่เท่ากันออกไปทางฐานจะได้ว่ามุมที่ฐานเท่ากันด้วย

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า $\hat{A}BC = \hat{A}CB$ ซึ่งเป็นมุมที่ฐาน และ $\hat{C}BD = \hat{B}CE$ เป็นมุมที่ฐานที่เกิดจากการต่อด้านที่เท่ากันออกไปทางฐาน

ทฤษฎีบทที่ 6 ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมเท่ากันสองมุมแล้ว ด้านตรงข้ามมุมที่เท่ากันย่อมเท่ากัน

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่ากำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุมเท่ากันสองมุม คือ $\hat{A}CB = \hat{A}BC$ ทำให้ด้านตรงข้ามมุมที่เท่ากันย่อมเท่ากัน คือ $\overline{AC} = \overline{AB}$

ทฤษฎีบทที่ 7 ถ้าลากส่วนของเส้นตรง จากจุดปลายทั้งสองของเส้นตรงเส้นหนึ่งไปพบกันข้างหนึ่งของเส้นตรง จะไม่สามารถลากส่วนของเส้นตรงคู่อื่นใดจากจุดเดิมตามลำดับให้เท่ากับส่วนของเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นตามลำดับโดยให้พบกันข้างเดียวกันนั้นได้อีก

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า จะไม่สามารถลากส่วนของเส้นตรงจากจุดปลาย A และ B ให้ยาวเท่ากับ $\overline{AC}$ และ $\overline{CB}$ ตามลำดับ ให้พบกันที่จุดนอกเส้นตรง AB ที่อยู่ข้างเดียวกันกับ C ได้

ทฤษฎีบทที่ 8 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสองด้าน ด้านต่อด้าน และมีฐานเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมทั้งสอง จะมีมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านฐานเท่ากัน

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า รูปสามเหลี่ยม ABC กับรูปสามเหลี่ยม EFG มีด้าน $\overline{AB} = \overline{GF}$, $\overline{AC} = \overline{EG}$ ทำให้ $\hat{BAC} = \hat{EGF}$ ซึ่งเป็นมุมตรงข้ามฐาน

ทฤษฎีบทที่ 9 การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า สามารถแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้ได้

ทฤษฎีบทที่ 10 สามารถแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า สามารถแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ได้

ทฤษฎีบทที่ 11 สามารถลากเส้นมาตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้ ที่จุดกำหนดให้บนเส้นตรง

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า สามารถลากเส้นมาตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้บนเส้นตรงได้

ทฤษฎีบทที่ 12 สามารถลากเส้นจากจุดที่กำหนดให้ ไปตั้งฉากกับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งที่กำหนดให้

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า สามารถลากเส้นจากจุดที่กำหนดให้ มาตั้งฉากกับเส้นตรงได้

ทฤษฎีบทที่ 13 เส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง จะได้มุมประชิดแต่ละมุมเป็นมุมฉากหรือมุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า ขนาดของมุมประชิดแต่ละมุมเป็นมุมฉากหรือมุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก

ทฤษฎีบทที่ 14 ที่จุดหนึ่งบนเส้นตรง ถ้ามีเส้นตรงสองเส้นที่ลากจากจุดจุดนั้นแต่อยู่คนละข้างทำให้เกิดมุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉากแล้ว เส้นตรงทั้งสองจะต่อเป็นเส้นตรงเดียวกัน

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า ถ้ามีเส้นตรงสองเส้นที่ลากจากจุดจุดนั้นแต่อยู่คนละข้างทำให้เกิดมุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉากแล้ว เส้นตรงทั้งสองจะต่อเป็นเส้นตรงเดียวกัน

ทฤษฎีบทที่ 15 เส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า เส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน

ทฤษฎีบทที่ 16 ถ้าต่อต้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะโตกว่ามุมภายในที่อยู่ตรงข้าม

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า ถ้าต่อต้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะโตกว่ามุมภายในที่อยู่ตรงข้าม

ทฤษฎีบทที่ 17 ผลบวกของมุมภายในสองมุมของรูปสามเหลี่ยม ย่อมน้อยกว่าสองมุมฉาก

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า ผลบวกของมุมภายในสองมุมของรูปสามเหลี่ยม ย่อมน้อยกว่าสองมุมฉาก

ทฤษฎีบทที่ 18 รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ด้านที่ยาวย่อมอยู่ตรงข้ามมุมที่ใหญ่กว่า

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ด้านที่ยาวย่อมอยู่ตรงข้ามมุมที่ใหญ่กว่า

ทฤษฎีบทที่ 19 รูปสามเหลี่ยมใด ๆ มุมที่ใหญ่กว่าย่อมอยู่ตรงข้ามด้านที่ยาวกว่า

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า รูปสามเหลี่ยมใด ๆ มุมที่ใหญ่กว่าย่อมอยู่ตรงข้ามด้านที่ยาวกว่า

ทฤษฎีบทที่ 20 รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ความยาวของด้านสองด้านรวมกันย่อมยาวกว่าด้านที่สาม

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า $\overline{CA} + \overline{BC} > \overline{AB}$, $\overline{CA} + \overline{AB} > \overline{BC}$, $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{CA}$ นั่นคือ ความยาวของด้านสองด้านรวมกันย่อมยาวกว่าด้านที่สาม

ทฤษฎีบทที่ 21 บนด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม ถ้าสร้างเส้นตรงสองเส้นบนปลายทั้งสองด้านนี้ไปตัดกันภายในรูปสามเหลี่ยม จะได้ว่าส่วนของเส้นตรงซึ่งทั้งสองดังกล่าวรวมกันย่อมสั้นกว่าผลบวกของด้านทั้งสองที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม แต่มุมที่ประกอบด้านทั้งสองจะโตกว่ามุมที่ประกอบด้วยด้านสองด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า $\overline{BD} + \overline{CD} < \overline{AB} + \overline{AC}$ และ $BDC > BAC$ นั่นคือ ถ้าสร้างเส้นตรงสองเส้นบนปลายทั้งสองด้านนี้ไปตัดกันภายในรูปสามเหลี่ยม จะได้ว่าส่วนของเส้นตรงซึ่งทั้งสองดังกล่าวรวมกันย่อมสั้นกว่าผลบวกของด้านทั้งสองที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม แต่มุมที่ประกอบด้านทั้งสองจะโตกว่ามุมที่ประกอบด้วยด้านสองด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม

ทฤษฎีบทที่ 22 สามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีความยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้สามเส้น โดยเส้นทั้งสามที่กำหนดให้นั้นมีผลรวมความยาวของเส้นใด ๆ ยาวกว่าเส้นที่สาม

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า สามารถสร้างรูปสามเหลี่ยม DEF ให้มีความยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$

ทฤษฎีบทที่ 23 สามารถสร้างมุมบนส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ ณ จุดที่กำหนดให้ ให้เท่ากับมุมที่กำหนดให้

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า สามารถสร้างมุม DCB บนส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ ณ จุด C ให้เท่ากับมุม MON ได้

ทฤษฎีบทที่ 24 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสองด้าน ด้านต่อด้าน แต่มุมในระหว่างด้านเท่าไม่เท่ากัน แล้วฐานที่อยู่ตรงข้ามมุมใหญ่จะยาวกว่าฐานที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เล็กกว่า

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า $\overline{BC}$ เป็นฐานที่อยู่ตรงข้ามมุมใหญ่ $\overline{BD}$ เป็นฐานที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เล็กกว่า ดังนั้น $\overline{BC} > \overline{BD}$ นั่นคือ ฐานที่อยู่ตรงข้ามมุมใหญ่จะยาวกว่าฐานที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เล็กกว่า

ทฤษฎีบทที่ 25 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน ด้านต่อด้าน และฐานของรูปหนึ่งยาวกว่าฐานของอีกรูปหนึ่ง จะทำให้มุมที่อยู่ตรงข้ามฐานที่ยาวกว่าโตกว่ามุมที่อยู่ตรงข้ามกับฐานที่สั้นกว่า

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า มุมที่อยู่ตรงข้ามฐานที่ยาวกว่าโตกว่ามุมที่อยู่ตรงข้ามกับฐานที่สั้นกว่า

ทฤษฎีบทที่ 26 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมเท่ากันสองมุม มุมต่อมุม และมีด้าน ๆ หนึ่งยาวเท่ากัน แล้วด้านที่เหลือย่อมยาวเท่ากัน ด้านต่อด้าน และมุมที่เหลือจะเท่ากัน

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$, $CAB = EDF$, $ACB = DFE$ และ $\overline{BC} = \overline{EF}$, $ABC = DEF$

ทฤษฎีบทที่ 27 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดกับเส้นตรงสองเส้นทำให้มุมแย้งเท่ากันแล้ว เส้นตรงทั้งสองจะขนานกัน

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดกับเส้นตรงสองเส้นทำให้มุมแย้งเท่ากัน นั่นคือ เส้นตรง $\overline{AB}$ ขนานกับ เส้นตรง $\overline{CD}$

ทฤษฎีบทที่ 28 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดกับเส้นตรงสองเส้นทำให้มุมภายนอกเท่ากับมุมภายใน ซึ่งอยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัด หรือมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับสองมุมฉากแล้ว เส้นตรงทั้งสองจะขนานกัน

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า มุม $\angle AEF = \angle GEB$ และ $\angle AEF + \angle BEF = 180^\circ$ ดังนั้น เส้นตรง $\overline{AB}$ ขนานกับ เส้นตรง $\overline{CD}$

ทฤษฎีบทที่ 29 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดกับเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกันแล้ว จะทำให้มุมแย้งเท่ากัน มุมภายนอกเท่ากับมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด และมุมภายในซึ่งอยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า มุมแย้งเท่ากัน มุมภายนอกเท่ากับมุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด และมุมภายในซึ่งอยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก

ทฤษฎีบทที่ 30 เส้นตรงทั้งหลายที่ต่างก็ขนานกับเส้นตรงเดียวกันย่อมขนานกัน

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า เส้นตรง $\overline{AB}$ ขนานกับเส้นตรง $\overline{CD}$ และเส้นตรง $\overline{CD}$ ขนานกับ เส้นตรง $\overline{IJ}$ ดังนั้น $\overline{AB}$ ขนานกับ เส้นตรง $\overline{IJ}$

ทฤษฎีบทที่ 31 จงลากเส้นตรงผ่านจุดที่กำหนดให้และให้ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า สามารถลากเส้นตรง $\overline{EF}$ ผ่านจุด C ที่และขนานกับเส้นตรง $\overline{AB}$

ทฤษฎีบทที่ 32 รูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งออกไป มุมภายนอกจะเท่ากับผลรวมของมุมภายในสองมุมที่อยู่ตรงข้าม และมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันจะเท่ากับสองมุมฉาก

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า ผลรวมของมุม $\angle ABC + \angle BAC = \angle DCA$ และผลรวมของมุม $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$

ทฤษฎีบทที่ 33 ถ้าลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดปลายข้างเดียวกันของส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่ยาวเท่ากัน และ ขนานกันแล้ว เส้นเชื่อมนั้นจะยาวเท่ากัน และขนานกันด้วย

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่าด้าน $\overline{AD} = \overline{BC}$ และขนาดของมุม $\angle BAC = \angle ACD$ นั่นคือ เส้นเชื่อมนั้นจะยาวเท่ากันและขนานกัน

ทฤษฎีบทที่ 34 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ด้านตรงข้ามจะยาวเท่ากัน มุมตรงข้ามจะเท่ากัน และเส้นทแยงมุมจะแบ่งรูปออกเป็นสองส่วน ๆ กัน

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า ด้าน $\overline{AD} = \overline{BC}$ ด้าน $\overline{AB} = \overline{DC}$ และขนาดของมุม $\angle BAC = \angle ACD$ และมุม $\angle CAD = \angle ACB$ นั่นคือ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ด้านตรงข้ามจะยาวเท่ากัน มุมตรงข้ามจะเท่ากัน และเส้นทแยงมุมจะแบ่งรูปออกเป็นสองส่วน ๆ กัน

ทฤษฎีบทที่ 35 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่อยู่บนฐานเดียวกันและด้านบนอยู่บนเส้นขนานกับฐานเส้นเดียวกันแล้ว จะมีพื้นที่เท่ากัน

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ และรูปสี่เหลี่ยม $BEFC$ อยู่บนฐานเดียวกันและด้านบนอยู่บนเส้นขนานกับฐานเส้นเดียวกันมีพื้นที่เท่ากัน

ทฤษฎีบทที่ 36 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีฐานยาวเท่ากัน และมีด้านตรงข้ามกับด้านฐานอยู่บนเส้นขนานคู่เดียวกันจะมีพื้นที่เท่ากัน

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ และรูปสี่เหลี่ยม $EFGH$ มีพื้นที่เท่ากัน

ทฤษฎีบทที่ 37 รูปสามเหลี่ยมที่มีฐานเดียวกัน และจุดยอดกับฐานอยู่บนเส้นขนานคู่เดียวกัน จะมีพื้นที่เท่ากัน

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม BCD มีฐานเดียวกัน และจุดยอดกับฐานอยู่บนเส้นขนานคู่เดียวกันมีพื้นที่เท่ากัน

ทฤษฎีบทที่ 38 รูปสามเหลี่ยมที่มีฐานยาวเท่ากัน และจุดยอดกับฐานอยู่บนเส้นขนานคู่เดียวกัน จะมีพื้นที่เท่ากัน

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF มีความยาวฐานเท่ากันและมีพื้นที่เท่ากัน

ทฤษฎีบทที่ 39 รูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่เท่ากัน และอยู่บนฐานเดียวกัน โดยจุดยอดอยู่ข้างเดียวกันของฐานแล้ว จุดยอดทั้งสองจะอยู่บนเส้นที่ขนานกับฐาน

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABC เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม BCD และมีมุมแย้ง $\angle ECA = \angle GAC$, $\angle HBD = \angle FBD$ นั่นคือรูปสี่เหลี่ยม ABC และรูปสี่เหลี่ยมมีจุดยอดอยู่บนเส้นตรง $\overline{GH}$

ทฤษฎีบทที่ 40 รูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่เท่ากัน ฐานยาวเท่ากัน และฐานอยู่บนเส้นเดียวกัน โดยจุดยอดอยู่ข้างเดียวกันของฐานแล้ว จุดยอดทั้งสองจะอยู่บนเส้นที่ขนานกับฐาน

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF มีพื้นที่ และฐานยาวเท่ากัน โดยมีจุดยอดอยู่บนเส้นตรง $\overline{GH}$ โดยพบว่ามุม $\angle GAB = \angle CBA$ และ มุม $\angle HDF = \angle EFD$ ซึ่งเป็นมุมแย้ง ดังนั้น จุด A และจุด D อยู่บนเส้นที่ขนานกับฐาน

ทฤษฎีบทที่ 41 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีฐานเดียวกับรูปสามเหลี่ยม ซึ่งจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม และด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานอยู่บนเส้นเดียวกันที่ขนานกับฐาน รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะมีพื้นที่เป็นสองเท่าของรูปสามเหลี่ยม

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCI มีฐานเดียวกับรูปสามเหลี่ยม ABD รูปสามเหลี่ยม BCD ซึ่งจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม และด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานอยู่บนเส้นเดียวกันที่ขนานกับฐาน พบว่ารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCI มีพื้นที่เป็นสองเท่าของรูปสามเหลี่ยม ABD รูปสามเหลี่ยม BCD

ทฤษฎีบทที่ 42 สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุม ๆ หนึ่งเท่ากับมุมที่กำหนดให้ และมีพื้นที่เท่ากับรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยม GEYF ให้มีพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC

ทฤษฎีบทที่ 43 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานใด ๆ ถ้าลากเส้นผ่านจุดใด ๆ บนเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่งให้ขนานกับด้านสองด้าน จะได้รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานสี่รูป ซึ่งสองรูปที่เส้นทแยงมุมเส้นนั้นไม่แบ่งเป็นสองส่วนเท่ากัน จะมีพื้นที่เท่ากัน

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เมื่อลากเส้นผ่านจุดใด ๆ บนเส้นทแยงมุมเส้น $\overline{AC}$ ให้ขนานกับด้าน $\overline{AB}$ และด้าน $\overline{CD}$ จะได้จะได้รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน AEKH รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน BGKE รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน KFDH และรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน GCKF ซึ่งพบว่า พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน BGKE เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน KFDH

ทฤษฎีบทที่ 44 สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานบนส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ และมีมุมหนึ่งเท่ากับมุมที่กำหนดให้ และมีพื้นที่เท่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน GEYF เท่ากับพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC และขนาดมุม BAC ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับขนาดมุม EGF ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน GEYF นั่นคือ สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน GEYF บนส่วนของเส้นตรง $\overline{GK}$ และมีมุม EGF เท่ากับมุม BAC ที่กำหนดให้ และมีพื้นที่เท่ารูปสามเหลี่ยม ABC

ทฤษฎีบทที่ 45 สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ให้มีมุมเท่ากับมุมที่กำหนดให้มุมหนึ่ง และมีพื้นที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งที่กำหนดให้

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า ขนาดมุม DAB ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับขนาดมุม FEH ของรูปสี่เหลี่ยม EFGH และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม EFGH นั่นคือ สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน EFGH ให้มีมุมเท่ากับมุม DAB และมีพื้นที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยม ABCD

ทฤษฎีบทที่ 46 สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD บนส่วนของเส้นตรง $\overline{OP}$ ได้

ทฤษฎีบทที่ 47 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ จัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากจะมีพื้นที่ เท่ากับ ผลบวกของจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า พื้นที่ของจัตุรัส ADEC, BCFG ที่อยู่บนด้านประกอบมุมฉาก ACB พบว่าพื้นที่ของจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก ABHI พื้นที่ เท่ากับ ผลบวกของจัตุรัส ADEC กับ BCFG ซึ่งเป็นจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

ทฤษฎีบทที่ 48 รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้าจัตุรัสบนด้าน ๆ ด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม เท่ากับ ผลบวกของจัตุรัสบนด้านที่เหลือแล้ว มุมที่ประกอบด้านที่เหลือนั้นจะเป็นมุมฉาก

ผลการพิสูจน์ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่าจัตุรัส ABHI มีพื้นที่ เท่ากับ ผลบวกของจัตุรัส ADEC กับ BCFG ดังนั้น มุม ACB ที่ประกอบด้าน $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ เป็นมุมฉาก

จากการศึกษาการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เพื่อฝึกการสร้างรูปเรขาคณิต เพื่อฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด พบว่ามีนักศึกษาที่สร้างเรขาคณิตได้ทั้งหมด 17 คน ร้อยละ 100 และสามารถใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ในการอธิบายการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิดได้ทั้งหมด 17 คน ร้อยละ 100

5.2 อภิปรายผลการสร้างรูปเรขาคณิต เพื่อแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

การศึกษาการสร้างชุดการฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เพื่อฝึกการสร้างรูปเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด ทำให้ผู้เรียนใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สำหรับการฝึกการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในระนาบของยูคลิด และเกิดการเปลี่ยนมุมมองการคิดทฤษฎีบทเรขาคณิต จากนามธรรมเป็นรูปธรรม ซึ่งสังเกตได้จากจำนวนนักศึกษาที่สามารถสร้าง และอธิบายการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 – 48 ได้ทั้งหมด 17 คน คิดเป็นร้อยละร้อย 100 แต่ก็ยังมีข้อจำกัดสำหรับบางกรณี เช่น การวัดค่าของมุมที่มากกว่า 180 องศา โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ไม่สามารถทำได้ ดังนั้น จึงมีความจำเป็นที่จะต้องใช้ความรู้พื้นฐานเดิมในการแก้ปัญหา กรณี นี้

บรรณานุกรม

- ชัยณรงค์ ชันผณี. 2556. **เรขาคณิตแบบยูคลิด**. เพชรบูรณ์ : เพชรบูรณ์ก๊อบปี่เซ็นเตอร์.
- ประสิทธิ์ ทองแจ่ม. 2520. **รากฐานเรขาคณิต**. สุราษฎร์ธานี. สถาบันราชภัฏสุราษฎร์ธานี.
- สมพร เรืองโชติวิทย์. 2524. **รากฐานเรขาคณิต**. กรุงเทพฯ. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน.
- สมวงษ์ แปลงประสพโชค. 2547. **รากฐานเรขาคณิต**. กรุงเทพฯ. มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนคร.
- สาขาเทคโนโลยีสารสนเทศ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2549).
เทคนิคการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ขั้นสูง. กรุงเทพมหานคร.
- สิริวรรณ ตั้งจิตวัฒนกุล. 2555. **รากฐานเรขาคณิต**. พิมพ์ครั้งที่ 7. กรุงเทพฯ. มหาวิทยาลัยรามคำแหง.
- Birkhoff, J. D. & Beatley, R. 2000. **Basic Geometry**. AMS Chelsea Publish.