



รายงานโครงการวิจัยฉบับสมบูรณ์

การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบสลับด้วยกฎการสลับที่เหมาะสม

Stability analysis of switched systems with suitable switching
laws

นายสุริยล ยิ้มเนตร

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

ปี 2569

รายงานโครงการวิจัยฉบับสมบูรณ์

การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบสลับด้วยกฎการสลับที่เหมาะสม

Stability analysis of switched systems with suitable switching laws

นายสุริยล ยิ้มเนตร

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

นางสาวอิสรา โสตา

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ประเภททุนอุดหนุนการวิจัยและพัฒนานวัตกรรม งบประมาณเงินรายได้

ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2568

มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

กิตติกรรมประกาศ

ข้าพเจ้า นายสุริยล ยิ้มเนตร หัวหน้าโครงการวิจัยเรื่อง การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ สลับด้วยกฎการสลับที่เหมาะสม (Stability analysis of switched systems with suitable switching laws) รหัสโครงการ: 208923 และรหัสข้อเสนอการวิจัย: 68A145000083 พร้อมด้วย นางสาวอิสรา โสตา ผู้ร่วมโครงการวิจัย สังกัดสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ คณะ วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ ได้รับทุนสนับสนุนโครงการวิจัยจาก มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ โดยมีผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ปรีชา ศรีเรืองฤทธิ์ อธิการบดี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ เป็นผู้ให้ทุนอุดหนุนงานวิจัยและพัฒนานวัตกรรม งบประมาณเงิน รายได้ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2568 และให้โอกาสแก่คณะผู้วิจัยได้มีโอกาสทำวิจัยในครั้งนี้

นอกจากนี้ คณะผู้วิจัยขอขอบคุณ ผู้บริหารและเจ้าหน้าที่สถาบันวิจัยและพัฒนา ตลอดจน คณาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัย ราชภัฏเพชรบูรณ์ทุกท่าน ที่ให้การสนับสนุน คำแนะนำ และอำนวยความสะดวก จนทำให้การวิจัย ในโครงการนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี

สุริยล ยิ้มเนตร

อิสรา โสตา

คณะผู้วิจัย

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาเสถียรภาพของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นที่ประกอบด้วยระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด โดยอาศัยวิธีการสร้างฟังก์ชันไลปูนอฟแบบร่วมบวกและการใช้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นอยู่กับแต่ละระบบย่อย ก่อให้เกิดทฤษฎีใหม่ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอเพื่อยืนยันการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างของระบบที่ศึกษา อีกทั้งมีการเปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากงานวิจัยอื่น พบว่างานวิจัยนี้มีความเป็นทั่วไปมากกว่า เนื่องจากความไม่เชิงเส้นของระบบและกลยุทธ์ของการใช้กฎการสลับที่ได้เลือกมาศึกษา นอกจากนี้ยังมีการนำเสนอตัวอย่างเชิงตัวเลขเพื่อยืนยันความถูกต้องของการวิเคราะห์เชิงทฤษฎีที่ได้ถูกสร้างขึ้นจากงานวิจัยนี้

Abstract

This paper examines the stability of switched positive nonlinear systems with all unstable subsystems. A discretized co-positive Lyapunov function, combined with a mode-dependent dwell time switching law, yields novel sufficient conditions for ensuring global uniform asymptotic stability for these systems. Comparison with prior work demonstrates greater generality, owing to both the systems' nonlinearity and the specific switching strategy. A numerical example supports the theoretical findings.

สารบัญ

	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อภาษาไทย	ข
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญภาพ	จ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย	2
1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	3
1.4 ขอบเขตการวิจัย	3
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	4
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย	7
3.1 ลักษณะการทำงานของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เป็นระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น	7
3.2 นิยามศัพท์เฉพาะ	8
3.3 ทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ใหม่ที่คิดค้นได้	10
บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	15
บทที่ 5 สรุปและอภิปรายผล	19
5.1 อภิปรายผลการศึกษาค้นคว้าวิจัย	19
5.2 สรุปผลการศึกษาค้นคว้าวิจัย	20
บรรณานุกรม	21
ประวัติผู้วิจัย	23

สารบัญภาพ

	หน้า
รูปที่ 1 แสดงแนววิถีสถานะของระบบย่อยที่หนึ่ง	16
รูปที่ 2 แสดงแนววิถีสถานะของระบบย่อยที่สอง	16
รูปที่ 3 แสดงแนววิถีสถานะของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) ซึ่งประกอบด้วยสองระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งคู่ทำงานร่วมกันภายใต้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย $\Xi_{[1,1.5]}$ และ $\Xi_{[2,2.5]}$	18

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ระบบสลับ (Switched system) เป็นระบบที่ประกอบด้วยการทำงานร่วมกันของระบบย่อยจำนวนจำกัดและกฎการสลับที่ระบุการสลับระหว่างระบบย่อยหลายระบบ ทั้งนี้ระบบสลับถือว่าเป็นหนึ่งในระบบพลวัต (Dynamical system) ที่ซึ่งประกอบด้วยชุดของตัวแปรที่ขึ้นกับเวลา ซึ่งเรียกว่า ตัวแปรสถานะ (State variable) ร่วมกับกฎทางวิทยาศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับอัตราของการเปลี่ยนแปลงปริมาณที่สามารถวัดได้เมื่อเวลาผ่านไป โดยในความเป็นจริง พฤติกรรมที่เป็นลักษณะเฉพาะของระบบพลวัตคือสถานะในอนาคตจะเป็นผลมาจากสถานะปัจจุบัน ซึ่งประเด็นที่สำคัญในการวิเคราะห์ระบบพลวัต คือ การศึกษาคุณสมบัติของระบบที่มีอยู่ 3 ประการได้แก่ ความมีอยู่จริง (Existence) ความมีอยู่หนึ่งเดียว (Uniqueness) และความมีเสถียรภาพ (Stability) ของผลเฉลยของระบบ

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า ระบบสลับมีความซับซ้อนและอาจมีการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยของเงื่อนไขเริ่มต้น ซึ่งอาจจะส่งผลกระทบต่อความไม่เสถียรและอาจเกิดประสิทธิภาพที่ไม่ดีของตัวระบบดังกล่าว ดังนั้นการวิเคราะห์เสถียรภาพและการเข้าสู่ของผลเฉลยของระบบสลับภายใต้การทำงานด้วยกันระหว่างระบบย่อยที่มีคุณลักษณะเสถียรและ/หรือไม่เสถียร จึงเป็นอีกหนึ่งปัญหาที่ดึงดูดให้นักวิจัยมากมายได้ทำการศึกษาค้นคว้ากันอย่างกว้างขวาง ทั้งนี้ประเด็นที่สำคัญสำหรับการศึกษาเสถียรภาพของระบบสลับนั้นมีอยู่สองวิธีพื้นฐานกล่าวคือ แนวทางแรกจะเป็นการตรวจสอบพฤติกรรมของผลเฉลยในช่วงเวลาที่ไม่มีสิ้นสุด หรือพฤติกรรมของผลเฉลยเป็นเวลานาน ๆ โดยใช้แนวคิดเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับของ Lyapunov (Lyapunov asymptotic stability) อีกแนวทางหนึ่งคือการวิเคราะห์เสถียรภาพอาจเพียงพอที่จะพิจารณาพฤติกรรมของผลเฉลยในช่วงเวลาจำกัดคงที่ ซึ่งจะเรียกว่าเสถียรภาพเวลาจำกัด (Finite-time stability) ถ้าวิถีสถานะของระบบไม่เกินเกณฑ์ที่กำหนดในระหว่างช่วงเวลาที่ได้กำหนดไว้ล่วงหน้าสำหรับขอบเขตที่กำหนดในสภาวะเริ่มต้น อย่างไรก็ตาม สำหรับแนวคิดของเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับของ Lyapunov และเสถียรภาพเวลาจำกัด มีความเป็นอิสระต่อกันโดยสิ้นเชิง กล่าวคือ ระบบอาจมีความเสถียรภาพ ณ เวลาจำกัด แต่ไม่มีความเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับของ Lyapunov ที่เวลานาน ๆ และในทางกลับกันระบบดังกล่าวอาจมีความเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับของ Lyapunov ที่เวลานาน ๆ แต่ไม่มีความเสถียรภาพ ณ เวลาจำกัดสั้น ๆ

สำหรับระบบสลับที่ประกอบด้วยกลุ่มของระบบย่อยที่เป็นบวกและกฎการสลับที่ควบคุมการทำงานของระบบโดยการสลับการทำงานกันระหว่างระบบย่อยที่เป็นบวกต่าง ๆ เหล่านั้น เรียกว่า ระบบสลับที่เป็นบวก (Switched positive system) ซึ่งถูกประยุกต์ใช้ในหลากหลายบริบท เช่น ด้านชีววิทยา นิเวศวิทยา

สิ่งแวดล้อม เศรษฐศาสตร์ และการสื่อสาร เป็นต้น ทั้งนี้ระบบสลับที่เป็นบวกยังแบ่งออกเป็นสองประเภท คือ ระบบสลับที่เป็นบวกเชิงเส้น (Switched positive linear system) และระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (Switched positive nonlinear system)

นอกจากนี้ ประเด็นในส่วนของกฎของสัญญาณการสลับที่ขึ้นกับเวลา จัดว่าเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการศึกษาเสถียรภาพของระบบสลับ ซึ่งมีด้วยกันหลายกฎ เช่น เวลาที่ดีพอ (Dwell time) เวลาเฉลี่ยที่ดีพอ (Average dwell time) เวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย (Mode-dependent dwell time) เวลาเฉลี่ยที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย (Mode-dependent average dwell time) เป็นต้น นอกจากนี้ยังมีหัวข้อที่น่าสนใจในการศึกษาเสถียรภาพของระบบสลับ นั่นคือ การทำงานของระบบย่อยต่าง ๆ ภายใต้กฎการสลับที่ขึ้นกับเวลาอย่างเหมาะสม ซึ่งสามารถแบ่งการวิเคราะห์ระบบสลับได้เป็น 3 ประเด็น คือ 1) ระบบสลับที่ประกอบด้วยระบบย่อยที่เสถียรทุกระบบย่อย 2) ระบบสลับที่ประกอบด้วยระบบย่อยทั้งที่เสถียร และระบบย่อยที่ไม่เสถียร โดยอาศัยหลักการทำงาน คือ ระบบย่อยที่มีเสถียรภาพจะถูกเปิดใช้งานเป็นเวลานานเพียงพอเพื่อชดเชยความแตกต่างของสถานะที่เกิดจากระบบย่อยที่ไม่เสถียร และ 3) ระบบสลับที่ประกอบด้วยระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด (All unstable subsystems) ซึ่งหลักการทำงานดังกล่าวไม่สามารถใช้ได้ ดังนั้น คณะผู้วิจัยจึงเกิดข้อคำถามขึ้นว่า เราจะออกแบบกฎของสัญญาณการสลับอย่างไรที่จะสามารถควบคุมการทำงานของระบบสลับที่มีแต่ระบบย่อยที่ไม่เสถียรทำงานร่วมกันอยู่ เพื่อให้สถานะของระบบสลับหลักมีความเสถียรภาพตลอดการทำงานของมัน จากคำถามดังกล่าวจึงเป็นแรงบันดาลใจให้คณะผู้วิจัยได้ใช้องค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อที่จะสร้างทฤษฎีใหม่ที่เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอในการยืนยันการมีเสถียรภาพของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นแม้ว่ามันจะมีแต่ระบบย่อยที่ไม่เสถียรทำงานร่วมกันภายใต้การเลือกใช้กฎของสัญญาณการสลับที่ขึ้นกับเวลาอย่างเหมาะสม ซึ่งการทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องกับหัวข้องานวิจัยนี้ จะถูกนำเสนอและเรียบเรียงไว้ในบทถัดไป

1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย

- 1.2.1 เพื่อศึกษาลักษณะและพฤติกรรมการทำงานของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น
- 1.2.2 เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น
- 1.2.3 เพื่อสร้างทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอที่จะยืนยันการมีเสถียรภาพของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นโดยใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์และกฎการสลับที่เหมาะสม
- 1.2.4 เพื่อประยุกต์ใช้ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ได้สร้างขึ้นกับโปรแกรมทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการศึกษาพฤติกรรมการทำงานของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น วิเคราะห์กฎการสลับและนำเสนอผลงานวิจัยในรูปของกราฟและรูปภาพ

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1.3.1 ทราบถึงลักษณะและพฤติกรรมการทำงานของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น
- 1.3.2 วิเคราะห์เสถียรภาพของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นได้
- 1.3.3 สามารถสร้างทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอที่จะยืนยันการมีเสถียรภาพของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นโดยใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์และกฎการสลับที่เหมาะสม
- 1.3.4 ประยุกต์ใช้ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ได้สร้างขึ้นกับโปรแกรมทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการศึกษาพฤติกรรมการทำงานของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น วิเคราะห์กฎการสลับและนำเสนอผลงานวิจัยในรูปของกราฟและรูปภาพ
- 1.3.5 นักวิจัย นักวิชาการ ครู อาจารย์ และผู้ที่สนใจสามารถนำองค์ความรู้ใหม่ที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบพลวัตโดยเฉพาะระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น ไปพัฒนาต่อยอด และประยุกต์ใช้ในวงการวิชาการต่อไป

1.4 ขอบเขตการวิจัย

โครงการวิจัยนี้ได้ประยุกต์ใช้องค์ความรู้การวิเคราะห์เสถียรภาพในแบบต่าง ๆ การวิเคราะห์เชิงตัวเลข การวิเคราะห์การทำงานของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น และการวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับหัวข้องานวิจัยนี้ สร้างและพัฒนาทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งบูรณาการโปรแกรมทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการศึกษาพฤติกรรมการทำงานและเสถียรภาพของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น ซึ่งผลลัพธ์ของงานวิจัยจะถูกนำเสนอทั้งในรูปแบบของทฤษฎีและในรูปของกราฟและ/หรือรูปภาพ

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในงานวิจัยของ Shorten et al., (2007) ได้กล่าวไว้ว่า ระบบไฮบริด (Hybrid system) เป็นระบบพลวัตที่อธิบายโดยใช้การผสมผสานระหว่างพลวัตแบบต่อเนื่อง/ไม่ต่อเนื่อง และการสลับตามตรรกะ ลักษณะการทำงานของระบบดังกล่าวคือ ระบบจะวิวัฒนาการไปตามพลวัตแบบต่อเนื่อง/ไม่ต่อเนื่องที่ขึ้นอยู่กับโหมด (Mode) และจะประสบกับการเปลี่ยนแปลงระหว่างโหมดต่าง ๆ ซึ่งถูกกระตุ้นโดยเหตุการณ์ต่าง ๆ (Events) ตัวอย่างของระบบไฮบริด ได้แก่ การทำงานของรถยนต์ ซึ่งเป็นที่ประจักษ์ว่าลักษณะการตอบสนองของความเร็วของรถยนต์ต่อการเหยียบคันเร่งนั้นขึ้นอยู่กับเกียร์ที่ใช้งานอยู่ ดังนั้น พลวัตของรถยนต์จึงอาจมองได้ว่าเป็นแบบไฮบริด กล่าวคือ ในแต่ละโหมด (เกียร์ที่ใช้งานอยู่) พลวัตจะพัฒนาไปอย่างต่อเนื่องตามสมการเชิงอนุพันธ์บางอย่าง การเปลี่ยนผ่านระหว่างโหมดนั้นเกิดขึ้นอย่างฉับพลันและถูกกระตุ้นโดยการแทรกแซงของผู้ขับขี่ในรูปแบบของการเปลี่ยนเกียร์ นอกจากนี้ เครือข่ายควบคุมทางพันธุกรรม (Genetic regulatory network) ประกอบด้วยชุดของยีนที่ได้ต่อกันซึ่งแต่ละยีนจะสร้างโปรตีนผ่านกระบวนการที่เรียกว่า การแสดงออกของยีน (Gene expression) โปรตีนเหล่านี้สามารถควบคุมอัตราการแสดงออกของยีนในเครือข่ายได้ ความสัมพันธ์ของอัตราการแสดงออกของยีนกับความเข้มข้นของโปรตีนควบคุมมักจะไม่เป็นเชิงเส้น โดยที่พลวัตการควบคุมจะเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วเมื่อความเข้มข้นของโปรตีนข้ามค่าเกณฑ์ต่างๆ การประมาณนี้ทำให้เกิดระบบสลับประเภทหนึ่งที่มีพลวัตเชิงเส้นแบบเป็นช่วงๆ แม้ว่าแบบจำลองดังกล่าวจะมีข้อจำกัดหลายประการ แต่ก็สามารถให้ข้อมูลเชิงลึกที่มีคุณภาพซึ่งมีค่าเกี่ยวกับพลวัตของการควบคุมยีนได้ เป็นต้น จากตัวอย่างข้างต้นน่าจะเห็นได้ชัดว่าระบบไฮบริดเป็นวิธีการที่สะดวกสำหรับการสร้างแบบจำลองระบบพลวัตที่ซับซ้อนหลากหลายประเภท และใช้ในการอธิบายสถานการณ์ในทางปฏิบัติที่หลากหลาย อนึ่ง ส่วนใหญ่ การศึกษาระบบไฮบริดและระบบสลับได้ก่อให้เกิดปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ทำนายหลายประการซึ่งยังคงไม่ได้รับคำตอบ ปัญหาเหล่านี้หลายข้อเกี่ยวข้องกับปัญหาเสถียรภาพในระบบพลวัตไฮบริด และก่อให้เกิดคำถามพื้นฐานหลายข้อในสาขานี้ โดยในที่นี้จะแสดงรายการบางส่วนต่อไปนี้

- 1) การสลับแบบอิสระ (Arbitrary switching) : เป็นไปได้หรือไม่ที่จะกำหนดเงื่อนไขที่ตรวจสอบได้สำหรับตระกูลของระบบองค์ประกอบที่รับประกันเสถียรภาพของระบบสลับที่เกี่ยวข้องภายใต้กฎการสลับแบบอิสระ งานวิจัยส่วนใหญ่เกี่ยวกับปัญหานี้มุ่งเน้นไปที่คำถามเกี่ยวกับการมีอยู่ของฟังก์ชัน Lyapunov ร่วมกัน
- 2) เวลาที่ดีพอ : หากเราสลับระหว่างระบบย่อยที่มีเสถียรภาพแต่ละระบบย่อยอย่างซ้ำๆ ระบบโดยรวมก็จะมีเสถียรภาพ ซึ่งทำให้เกิดคำถามว่าเราจะสลับได้เร็วแค่ไหนในขณะที่ยังคงรับประกันเสถียรภาพได้ กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ระยะเวลาขั้นต่ำที่ต้องผ่านไประหว่างการสลับที่

ต่อเนื่องกันเพื่อให้แน่ใจว่าระบบโดยรวมยังคงมีเสถียรภาพคือเท่าใด ปัญหานี้มักเรียกว่า ปัญหาเวลาที่ดีพอ (dwell time problem)

- 3) การทำให้เสถียร (Stabilization) : ในขณะที่การสลับการทำงานกันระหว่างระบบย่อยที่เสถียร อาจทำให้ระบบโดยรวมเกิดความไม่เสถียร ในทางกลับกัน บางครั้งก็สามารถทำให้ระบบโดยรวมที่ไม่เสถียรมีเสถียรได้โดยการสลับการทำงานกันระหว่างระบบย่อยเหล่านั้นอย่างเหมาะสม จากการสังเกตนี้ ผู้เขียนหลายคนได้ทำงานเกี่ยวกับปัญหาการกำหนดกฎการสลับที่ทำให้เสถียรดังกล่าว

สำหรับในงานวิจัยของ Knorn et al., (2009) ได้กล่าวไว้ว่า ระบบบวก (Positive system) คือ ระบบพลวัตที่สถานะถูกจำกัดให้เป็นบวกในขณะที่วิถีการเคลื่อนที่เปลี่ยนแปลงไปนั้น ซึ่งเป็นระบบที่ถูกพบเจอและอธิบายได้อย่างมากมายในสาขาวิศวกรรมควบคุมและคณิตศาสตร์ในช่วงไม่กี่ปีที่ผ่านมา และในงานวิจัยของ Xiang et al., (2017) ได้กล่าวไว้ว่า ระบบสลับที่เป็นบวก คือระบบซึ่งประกอบด้วยกลุ่มของระบบย่อยที่เป็นบวกและกฎการสลับที่ควบคุมการทำงานของระบบโดยการสลับการทำงานกันระหว่างระบบย่อยต่าง ๆ ซึ่งระบบสลับที่เป็นบวกสามารถถูกประยุกต์ใช้ในหลากหลายบริบท เช่น ด้านชีววิทยา นิเวศวิทยา สิ่งแวดล้อม เศรษฐศาสตร์ และการสื่อสาร เป็นต้น โดยในการศึกษาระบบนี้จะมุ่งประเด็นไปที่การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ นั่นคือ ศึกษาความสามารถและพฤติกรรมของระบบในการกลับคืนสู่สภาวะปกติเมื่อการรบกวนจากปัจจัยภายนอกยุติลง โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น ซึ่งเป็นระบบสลับที่มีกระบวนการทำงานที่ซับซ้อน แต่มีความเป็นทั่วไปและประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้มากกว่าระบบสลับที่เป็นบวกเชิงเส้น ด้วยเหตุนี้ คณะผู้วิจัยจึงได้สนใจจะศึกษาและวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น โดยอาศัยองค์ความรู้และแนวคิดจาก Aleksandrov et al., (2011) ซึ่งจะเริ่มทำการทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องกับหัวข้องานวิจัยนี้ ดังต่อไปนี้

ในงานวิจัยของ Xiang และ Xiao (2014) ได้สร้างทฤษฎีที่เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอเพื่อวิเคราะห์การมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (asymptotic stability) ของระบบสลับที่มีแต่ระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด โดยใช้กฎการสลับเวลาที่ดีพอ ต่อมาในงานวิจัยของ Mao et al., (2019) ได้สร้างทฤษฎีที่เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอเพื่อวิเคราะห์การมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง (Exponential stability) ของระบบสลับที่มีแต่ระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด โดยใช้กฎการสลับเวลาเฉลี่ยที่ดีพอ อย่างไรก็ตาม ทั้งสองงานวิจัยดังกล่าวไม่ได้ศึกษาระบบที่เป็นบวกและไม่ได้ประยุกต์ใช้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย สำหรับในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) ได้สร้างทฤษฎีที่เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอเพื่อวิเคราะห์การมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับของระบบสลับที่เป็นบวกเชิงเส้นที่ประกอบด้วยระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด โดยใช้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย และในงานวิจัยของ Zhao และ Li (2017) ได้ศึกษาปัญหาเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบสลับที่เป็นบวกเชิงเส้นที่ประกอบด้วยระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด โดยใช้กฎการสลับเวลาที่ดีพอต่ำสุด (Minimum dwell time) และเวลาเฉลี่ยที่ดีพออย่างรวดเร็ว (Fast average dwell time) ทั้งนี้คุณสมบัติที่สำคัญของการเป็นระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วยระบบย่อยที่เสถียรทุกระบบย่อยทำงาน

ร่วมกันภายใต้การใช้กฎการสลับเวลาเฉลี่ยที่ดีพอ ได้ถูกศึกษาในงานวิจัยของ Zhang et al., (2016) ต่อมาในงานวิจัยของ Tian และ Sun (2019) ได้ศึกษาปัญหาเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นที่ประกอบด้วยระบบย่อยที่เสถียรทุกระบบย่อยทำงานร่วมกันภายใต้การใช้กฎการสลับเวลาเฉลี่ยที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย ในขณะทำงานวิจัยของ Dong และ Tian (2024) ได้ศึกษาระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นซึ่งประกอบด้วยระบบย่อยที่เสถียรและระบบย่อยที่ไม่เสถียรทำงานร่วมกันภายใต้การใช้กฎการสลับเวลาเฉลี่ยที่ดีพอ อย่างไรก็ตาม ทั้งสามงานวิจัยที่ได้กล่าวมาข้างต้น ไม่ได้ศึกษาในกรณีที่ทุกระบบย่อยเป็นระบบไม่เสถียรและไม่ได้ประยุกต์ใช้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย และเมื่อไม่นานนี้ ในงานวิจัยของ Zhang et al., (2025) ได้วิเคราะห์การมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบสลับที่เป็นบวกเชิงเส้น ซึ่งมีแต่ละระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมดทำงานร่วมกันภายใต้การใช้กฎการสลับเวลาที่ดีพอและเวลาที่สลับที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย

จากการทบทวนวรรณกรรมทั้งหมดข้างต้น พบว่า ยังไม่มีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นที่ประกอบด้วยระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมดทุกระบบย่อยทำงานร่วมกันภายใต้การเลือกใช้กฎของสัญญาณการสลับที่ขึ้นกับเวลาที่สลับที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย ด้วยเหตุนี้ มันจึงเป็นแรงบันดาลใจให้คณะผู้วิจัยได้จัดทำงานวิจัยในหัวข้อดังกล่าว

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

สำหรับวิธีการดำเนินการวิจัยของงานวิจัยนี้ คณะผู้วิจัยได้เริ่มจากการศึกษาและทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องกับลักษณะของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เป็นระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น ความเป็นบวกและพฤติกรรมการทำงานของระบบดังกล่าว โดยได้นำเสนอบทนิยามและสมมติฐานที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะนำไปสู่การสร้างทฤษฎีใหม่ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอเพื่อยืนยันการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นที่ซึ่งประกอบด้วยทุกระบบย่อยเป็นระบบที่ไม่เสถียร ทั้งนี้ เทคนิคการสร้างฟังก์ชันไลปูนอฟแบบร่วมบวกและการใช้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นอยู่กับแต่ละระบบย่อยได้ถูกประยุกต์ใช้ร่วมกันเพื่อสร้างขึ้นเป็นทฤษฎีใหม่ของงานวิจัยนี้

3.1 ลักษณะการทำงานของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เป็นระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น

คณะผู้วิจัยได้ศึกษาระบบสลับที่ไม่เชิงเส้นที่อยู่ในรูปของ

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}f(x(t)) \quad (1)$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น

$$x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

เมื่อ

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$$

เป็นเวกเตอร์สถานะที่ขึ้นกับเวลา t และ

$$f(x(t)) = (f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)), \dots, f_n(x_n(t)))^T \in \mathbb{R}^n$$

เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้นของเวกเตอร์สถานะที่ขึ้นกับเวลา t ในขณะที่

$$\sigma(t) : [t_0, +\infty) \rightarrow \underline{N} = \{1, 2, \dots, N\}$$

เป็นฟังก์ชันค่าคงที่แบบแบ่งส่วน ที่ซึ่งกำหนดสัญญาณการสลับที่ขึ้นกับเวลา t เมื่อ t_0 เป็นเวลาเริ่มต้น และ N เป็นจำนวนเต็มบวกที่แสดงถึงจำนวนของระบบย่อย และ $\dot{x}(t)$ เป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเวกเตอร์สถานะ $x(t)$ เทียบกับเวลา t นอกจากนี้ ถ้า $\sigma(t)$ คือระบบย่อยที่ i แล้ว A_i เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นค่าคงที่สำหรับ $i \in \underline{N}$

สำหรับระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) ถูกสมมติให้เป็นระบบที่ต่อเนื่องมาจากทางขวาทุกจุดสำหรับลำดับการสลับ $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{l-1} < t_l < \dots < +\infty$ เมื่อ $l \in \mathbb{N}_0$ (เซตของจำนวนเต็มบวกที่รวมศูนย์) โดยหลักการทำงานของระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) มีกลไกการทำงานคือ เมื่อระบบย่อยที่ $\sigma(t_l)$ หรือระบบย่อยที่ i ถูกเปิดใช้งานเมื่อ $t \in [t_l, t_{l+1})$ และระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) จะสลับจากระบบย่อยที่ $\sigma(t_{l-1})$ หรือระบบย่อยที่ j ไปยังระบบย่อยที่ i โดยที่ $i, j \in \underline{N}$ และ $i \neq j$

3.2 นิยามศัพท์เฉพาะ

บทนิยาม 1 [Zhang et al., (2016)]

ระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) จะถูกเรียกว่า ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น ถ้าสำหรับเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \succeq 0$ และสัญญาณการสลับที่ขึ้นกับเวลา $\sigma(t)$ ใด ๆ แล้วทำให้เวกเตอร์สถานะ $x(t) \succeq 0$ สำหรับทุก $t \geq t_0$

บทนิยาม 2 [Zhang et al., (2016)]

สำหรับเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นค่าคงตัว $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ จะถูกเรียกว่าเมทริกซ์เมตซ์เลอร์ (Metzler matrix) ก็ต่อเมื่อสมาชิกนอกแนวทแยงมุมทั้งหมดไม่เป็นลบ

สมมติฐาน 1

สำหรับ $x_p \in \mathbb{R}$ และ $p = 1, 2, \dots, n$ จะได้ว่า ฟังก์ชันไม่เชิงเส้น f ในระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) สอดคล้อง

$$\varepsilon_1 x_p^2 \leq f_p(x_p) x_p \leq \varepsilon_2 x_p^2$$

เมื่อ $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ และ $f_p(0) = 0$

อย่างไรก็ตาม ผลการศึกษาในงานวิจัยของ Dong และ Tian (2024) พบว่า ระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \succeq 0$ และสัญญาณการสลับที่ขึ้นกับเวลา $\sigma(t)$ ใด ๆ จะมีความเป็นบวกภายใต้สมมติฐาน 1 ก็ต่อเมื่อ A_i เป็นเมทริกซ์เมตซ์เลอร์ สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ นอกจากนี้ โดยไม่เสียนัยทางคณิตศาสตร์ สามารถอ้างจากสมมติฐาน 1 และ $x_p \geq 0$ ได้ว่า $\varepsilon_1 x_p \leq f_p(x_p) \leq \varepsilon_2 x_p$ สำหรับ $p = 1, 2, \dots, n$, $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ และ $f_p(0) = 0$

บทนิยาม 3 [Xiang และ Xiao (2014)]

สำหรับฟังก์ชันไม่เชิงเส้น f ในระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) ภายใต้สมมติฐาน 1 และสัญญาณการสลับที่ขึ้นกับเวลา $\sigma(t)$ ใด ๆ จะเรียกระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) ว่าเป็น

- 1) เสถียรแบบเอกรูป (uniformly stable) หรือ (US) ภายใต้ $\sigma(t)$ ใด ๆ ถ้า

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ ที่ทำให้ } \|x(t)\|_2 < \epsilon, \forall t \in [0, +\infty) \text{ เมื่อ } \|x_0\|_2 < \delta$$

- 2) เสถียรแบบเอกรูปวงกว้าง (global uniformly stable) หรือ (GUS) ภายใต้ $\sigma(t)$ ใด ๆ ถ้า

$$\forall \delta > 0 \text{ ที่ทำให้ } \|x(t)\|_2 < \epsilon, \forall t \in [0, +\infty)$$

- 3) เสถียรเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้าง (globally uniformly asymptotically stable) หรือ

$$(GUAS) \text{ ภายใต้ } \sigma(t) \text{ ใด ๆ ถ้าระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) เป็น GUS และ } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

บทนิยาม 4 [Feng et al., (2017)]

สำหรับความยาวระหว่างช่วงเวลาของการสลับต่อเนื่อง ที่ซึ่งระบบย่อยที่ i ถูกเปิดใช้งาน ถ้ามีค่าคงที่ $\tau_{i,l} > 0$ ที่ทำให้ $\tau_{i,l} = t_{l+1} - t_l$ สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ และ $l \in \mathbb{N}_0$ แล้วค่าคงที่ $\tau_{i,l}$ จะถูกเรียกว่าเป็นเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย (mode-dependent dwell time) หรือ (MDDT) ของระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1)

บทนิยาม 5 [Feng et al., (2017)]

สำหรับระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) กำหนดให้เวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย $\tau_{i,l} \in [\tau_{i,min}, \tau_{i,max}]$ เมื่อ $\tau_{i,min} = \inf_{l \in \mathbb{N}_0} \tau_{i,l}$, $\tau_{i,max} = \sup_{l \in \mathbb{N}_0} \tau_{i,l}$ และ $0 < \tau_{i,min} \leq \tau_{i,max}$ สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ และ $l \in \mathbb{N}_0$ นอกจากนี้ กำหนดให้ $\Xi_{[\tau_{i,min}, \tau_{i,max}]}$ คือ เซตของเทคนิคการสลับทั้งหมดด้วยกฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย $\tau_{i,l} \in [\tau_{i,min}, \tau_{i,max}]$ สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ และ $l \in \mathbb{N}_0$

สมมติฐาน 2

กำหนดให้ทุกระบบย่อยของระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) เป็นระบบย่อยที่ไม่เสถียร

3.3 ทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ใหม่ที่เกิดขึ้นได้

เป้าหมายหลักในงานวิจัยนี้คือ การสร้างทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ใหม่ที่เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอเพื่อที่จะยืนยันการเป็นบวกของระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) และการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างของระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) ที่ประกอบด้วยระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด โดยการออกแบบสัญญาณการสลับตามกฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย ซึ่งจะได้นำเสนอในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1

กำหนดให้ระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) สอดคล้องกับสมมติฐาน 1 และสมมติฐาน 2 โดยมี A_i เป็นเมทริกซ์เมตซ์เลอร์ $\forall i \in \underline{N}$ และกำหนดให้ $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, $0 < \mu_i < 1$, $0 < \xi_i$, $0 < \tau_{i,min}$, $\forall i \in \underline{N}$ และ $K \in \{1,2,3,\dots\}$ ถ้ามีเวกเตอร์บวก $v_{i,q} \succ 0$, $\forall i \in \underline{N}$, $q \in \{0,1,2,\dots,K\}$ และถ้ามีค่าคงที่ $\tau_{i,max} \geq \tau_{i,min}$, $\forall i \in \underline{N}$ ที่ทำให้เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

$$\frac{(v_{i,q+1} - v_{i,q})K}{\varepsilon_1 \tau_{i,min}} + \left[A_i^T - \frac{\xi_i}{\varepsilon_2} I_n \right] v_{i,q} \prec 0 \quad (3)$$

$$\frac{(v_{i,q+1} - v_{i,q})K}{\varepsilon_1 \tau_{i,min}} + \left[A_i^T - \frac{\xi_i}{\varepsilon_2} I_n \right] v_{i,q+1} \prec 0 \quad (4)$$

$$\left[A_i^T - \frac{\xi_i}{\varepsilon_2} I_n \right] v_{i,K} \prec 0 \quad (5)$$

$$v_{i,0} - \mu_i v_{j,K} \prec 0 \quad (6)$$

$$\ln \mu_i + \xi_j \tau_{j,max} < 0 \quad (7)$$

สำหรับทุก $q = 0,1,\dots,K-1$ และ $i,j \in \underline{N}$, $i \neq j$ แล้วระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) เป็นบวกและเสถียรเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้าง ภายใต้สัญญาณการสลับตามกฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย

บทพิสูจน์

จากบทตั้ง 2 ในงานวิจัยของ Zhang et al., (2016) ได้กล่าวว่า ภายใต้คุณสมบัติของการเป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น f ในระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (นั่นคือ ภายใต้สมมติฐาน 1) แล้วระบบสลับที่ไม่เชิงเส้นเป็นบวกก็ต่อเมื่อ A_i เป็นเมทริกซ์เมตซ์เลอร์ $\forall i \in \underline{N}$ ดังนั้น เมื่อกำหนดให้ระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) สอดคล้องกับสมมติฐาน 1 และสมมติฐาน 2 และ A_i เป็นเมทริกซ์เมตซ์เลอร์ $\forall i \in \underline{N}$ โดยบทตั้ง 2 ในงานวิจัยของ Zhang et al., (2016) จะได้ว่า เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \succeq 0$ และสัญญาณการสลับที่ขึ้นกับเวลา $\sigma(t)$ ใด ๆ ระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) เป็นบวก

ต่อไปจะเป็นการพิสูจน์ว่า ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐาน 1 และสมมติฐาน 2 มีความเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้าง ภายใต้สัญญาณการสลับตามกฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย โดยการสร้างฟังก์ชันไลปูนอฟแบบร่วมบวก

$$V_i(t, x(t)) = x^T(t) v_i(t) \quad (8)$$

สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ เมื่อฟังก์ชันเวกเตอร์ $v_i(t)$, $i \in \underline{N}$ ถูกสร้างโดยกำหนดให้

$$t \in [t_l, t_{l+1}) = [t_l, t_l + \tau_{i,min}) \cup [t_l + \tau_{i,min}, t_{l+1})$$

และ $[t_l, t_l + \tau_{i,min})$ ถูกแบ่งออกเป็น K ส่วน โดยมีความยาวเท่ากัน

$$h_i = \frac{\tau_{i,min}}{K}$$

และ

$$\Omega_{l,q}^i = [t_l + qh_i, t_l + (q+1)h_i)$$

เมื่อ $l \in \mathbb{N}_0$, $t > 0$, $\tau_{i,min} > 0$ สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ และฟังก์ชันเวกเตอร์ $v_i(t)$, $i \in \underline{N}$ นิยามโดย

$$v_i(t) = \begin{cases} (1 - \gamma(t))v_{i,q} + \gamma(t)v_{i,q+1}, & t \in \Omega_{l,q}^i, q = 0, 1, \dots, K-1 \\ v_{i,K}, & t \in [t_l + \tau_{i,min}, t_{l+1}) \end{cases}$$

โดยที่ $l \in \mathbb{N}_0$, $\gamma(t) = \frac{t - t_l - qh_i}{h_i}$ ซึ่ง $0 \leq \gamma(t) \leq 1$ และ $v_{i,q}$ เป็นเวกเตอร์ที่เป็นบวก สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ และ $q \in \{0, 1, 2, \dots, K\}$

จากนั้นหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไลปูนอฟแบบร่วมบวก (8) เทียบกับเวลา t และจากระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) จะได้ว่า

$$\dot{V}_i(t, x(t)) = x^T(t) \dot{v}_i(t) + f^T(x(t)) A_i^T v_i(t)$$

สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ จากนั้นอาศัยเงื่อนไขของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น f ในสมมติฐาน 1 จะได้ว่า

$$\dot{V}_i(t, x(t)) - \xi_i V_i(t, x(t)) \leq f^T(x(t)) \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \dot{v}_i(t) + \left(A_i^T - \frac{\xi_i}{\varepsilon_2} I_n \right) v_i(t) \right]$$

สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ จากนั้นเมื่อ $t \in \Omega_{l,q}^i \subset [t_l, t_l + \tau_{i,min})$ จะได้ว่า

$$\dot{v}_i(t) = \frac{(v_{i,q+1} - v_{i,q})K}{\tau_{i,min}}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_1} \dot{v}_i(t) + \left(A_i^T - \frac{\xi_i}{\varepsilon_2} I_n \right) v_i(t) &= (1 - \gamma(t)) \left[\frac{(v_{i,q+1} - v_{i,q})K}{\varepsilon_1 \tau_{i,min}} + \left(A_i^T - \frac{\xi_i}{\varepsilon_2} I_n \right) v_{i,q} \right] \\ &\quad + \gamma(t) \left[\frac{(v_{i,q+1} - v_{i,q})K}{\varepsilon_1 \tau_{i,min}} + \left(A_i^T - \frac{\xi_i}{\varepsilon_2} I_n \right) v_{i,q+1} \right] \end{aligned}$$

สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ และสำหรับทุก $q = 0, 1, \dots, K-1$ จากนั้นใช้เงื่อนไข (3) และเงื่อนไข (4) จะได้ว่า

$$\dot{V}_i(t, x(t)) < \xi_i V_i(t, x(t))$$

สำหรับ $t \in \bigcup_{q=0}^{K-1} \Omega_{l,q}^i = [t_l, t_l + \tau_{i,min})$ จากนั้นเมื่อพิจารณา $t \in [t_l + \tau_{i,min}, t_{l+1})$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \dot{v}_i(t) + \left(A_i^T - \frac{\xi_i}{\varepsilon_2} I_n \right) v_i(t) = \left(A_i^T - \frac{\xi_i}{\varepsilon_2} I_n \right) v_{i,K}$$

จากนั้นใช้เงื่อนไข (5) จะได้ว่า

$$\dot{V}_i(t, x(t)) < \xi_i V_i(t, x(t))$$

สำหรับ $t \in [t_l + \tau_{i,min}, t_{l+1})$ ดังนั้น

$$\dot{V}_i(t, x(t)) < \xi_i V_i(t, x(t))$$

สำหรับ $t \in [t_l, t_{l+1})$ เมื่อ $l \in \mathbb{N}_0$ จากนั้นทำการปริพันธ์บนช่วง $[t_l, t)$ จะได้ว่า

$$V_i(t, x(t)) < e^{\xi_i(t-t_l)} V_i(t_l, x(t_l)) \quad (9)$$

จากนั้นใช้เงื่อนไข (6) จะได้ว่า

$$v_i(t_l) \prec \mu_i v_j(t_l^-) \quad (10)$$

สำหรับ $i, j \in \underline{N}$ และ $i \neq j$ จากฟังก์ชันไลปูนอฟแบบร่วมบวก (8) และอสมการเวกเตอร์ (10) จะได้ว่า

$$V_i(t_l, x(t_l)) \leq \mu_i V_j(t_l^-, x(t_l^-)) \quad (11)$$

สำหรับ $i, j \in \underline{N}$ และ $i \neq j$ จากนั้นใช้อสมการ (9) และอสมการ (11) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t_l)}(t, x(t)) &< e^{\xi_{\sigma(t_l)}(t-t_l)} V_{\sigma(t_l)}(t_l, x(t_l)) \\ &\leq \mu_{\sigma(t_l)} e^{\xi_{\sigma(t_l)}(t-t_l)} V_{\sigma(t_{l-1})}(t_l^-, x(t_l^-)) \\ &< \mu_{\sigma(t_l)} e^{\xi_{\sigma(t_l)}(t-t_l)} e^{\xi_{\sigma(t_{l-1})}(t_l-t_{l-1})} V_{\sigma(t_{l-1})}(t_{l-1}, x(t_{l-1})) \end{aligned}$$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จะได้ว่า

$$V_{\sigma(t_l)}(t, x(t)) \leq e^{\xi_{\sigma(t_l)}(t-t_l)} \left(\prod_{k=0}^{l-1} \mu_{\sigma(t_{k+1})} e^{\xi_{\sigma(t_k)}(t_{k+1}-t_k)} \right) V_{\sigma(t_0)}(t_0, x(t_0))$$

ดังนั้น

$$V_{\sigma(t_l)}(t, x(t)) \leq e^{\xi_{\sigma(t_l)} \tau_{\sigma(t_l), \max}} \left(\prod_{k=0}^{l-1} \mu_{\sigma(t_{k+1})} e^{\xi_{\sigma(t_k)} \tau_{\sigma(t_k), \max}} \right) V_{\sigma(t_0)}(t_0, x(t_0))$$

จากนั้นอาศัยเงื่อนไข (7) จะได้ว่า

$$\mu_i e^{\xi_j \tau_{j, \max}} < 1 \quad (12)$$

สำหรับ $i, j \in \underline{N}$ และ $i \neq j$ ดังนั้น

$$V_{\sigma(t_l)}(t, x(t)) < e^{\xi_{\sigma(t_l)} \tau_{\sigma(t_l), \max}} V_{\sigma(t_0)}(t_0, x(t_0))$$

ต่อจากนั้น กำหนดให้ $X = \max_{i \in \underline{N}} \{\xi_i\}$ และ $T = \max_{i \in \underline{N}} \{\tau_{i, \max}\}$ จะได้ว่า

$$V_{\sigma(t_l)}(t, x(t)) < e^{XT} V_{\sigma(t_0)}(t_0, x(t_0)) \quad (13)$$

และกำหนดให้เวลาเริ่มต้น $t_0 = 0$ จากฟังก์ชันไลปูนอฟแบบร่วมบวก (8) จะได้ว่า

$$V_{\sigma(0)}(0, x(0)) \leq \sqrt{n} \sum_{\zeta \in \{0,1,2,\dots,K\}} \|v_{\sigma(0),\zeta}\|_2 \|x_0\|_2 \quad (14)$$

และ

$$\varsigma \|x(t)\|_2 \leq V_{\sigma(t)}(t, x(t)) \quad (15)$$

เมื่อ $\varsigma = \min_{(a,b) \in \underline{N} \times \{0,1,2,\dots,K\}} \{\underline{\omega}(v_{a,b})\}$ จากอสมการ (13), (14) และ (15) จะได้ว่า

$$\|x(t)\|_2 \leq \Theta \|x_0\|_2 e^{XT} \quad (16)$$

เมื่อ $\Theta = \frac{\sqrt{n}}{\varsigma} \sum_{\zeta \in \{0,1,2,\dots,K\}} \|v_{\sigma(0),\zeta}\|_2$ สำหรับ $t \geq 0$ ต่อจากนั้น สำหรับทุก $\epsilon > 0$ เราสามารถเลือก

$$\|x_0\|_2 < \delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\Theta e^{XT}}$$

ดังนั้น

$$\|x(t)\|_2 < \epsilon$$

สำหรับ $t \geq 0$ นั่นคือ ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) ที่ประกอบด้วยระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด มีความเสถียรภาพแบบเอกรูปภายใต้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย

อย่างไรก็ตาม สำหรับการจะพิสูจน์ว่า $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ จะคล้ายกับการพิสูจน์ในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) ซึ่งจะขอละไว้ในที่นี้ ดังนั้น ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) ที่ประกอบด้วยระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด มีความเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปกว้างภายใต้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

เพื่อแสดงให้เห็นว่า ทฤษฎีบท 1 ที่ได้ถูกสร้างขึ้นในบทที่ 3 ที่ผ่านมานั้นมีความถูกต้อง คณะผู้วิจัยจึงจะแสดงตัวอย่างเชิงตัวเลข ดังนี้

ตัวอย่าง 1 กำหนดให้ระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) ที่ประกอบด้วยสองระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด คือระบบย่อยที่หนึ่ง

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.5 & 0.06 \\ 0.06 & 0.2 \end{bmatrix}$$

ระบบย่อยที่สอง

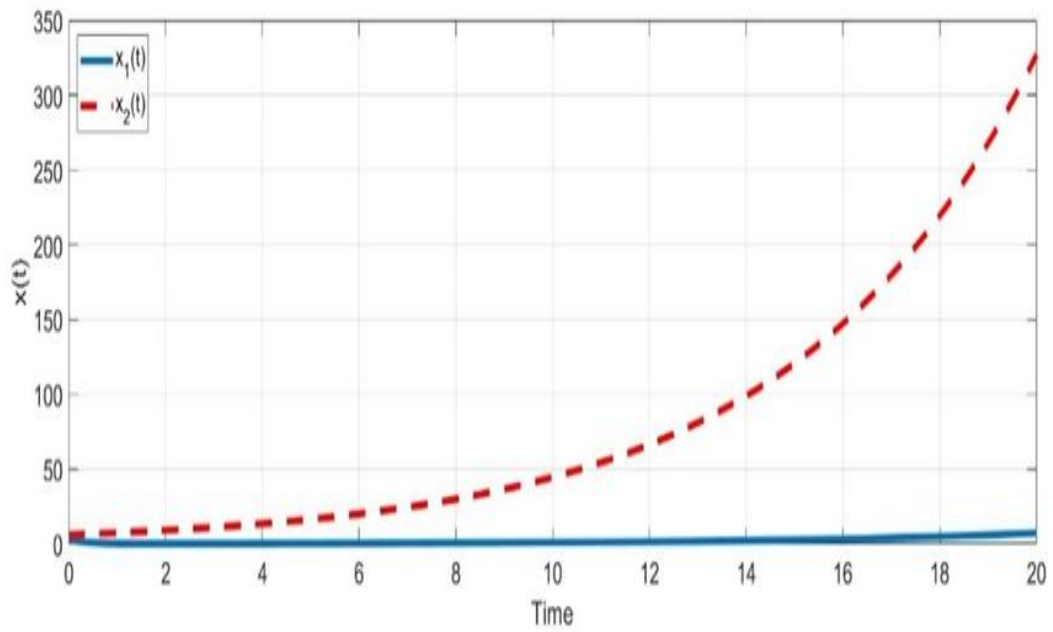
$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & -1.5 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันไม่เชิงเส้น

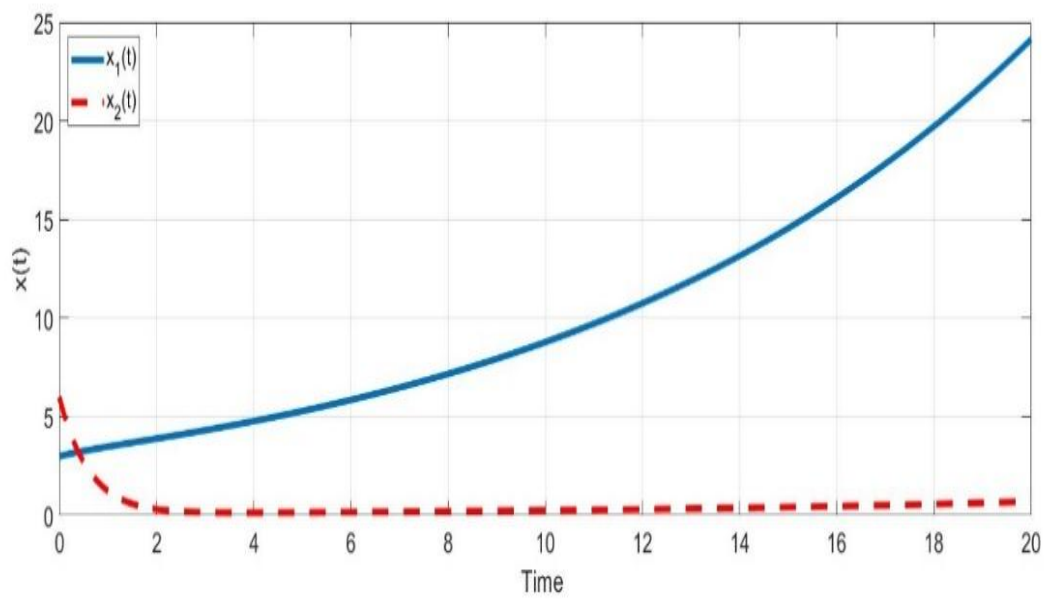
$$f_p(x_p(t)) = x_p(t) + \frac{0.1x_p(t)}{x_p^2(t) + 1}$$

สำหรับ $p=1,2$ จากฟังก์ชันไม่เชิงเส้นข้างต้นและสมมติฐาน 1 เราจะกำหนดให้ค่าคงที่ $\varepsilon_1 = 1$ และ $\varepsilon_2 = 1.1$ นอกจากนี้ จะเห็นได้ชัดว่า ทั้งเมทริกซ์ A_1 และ A_2 ที่ได้ให้ไว้ข้างต้นเป็นเมทริกซ์เมตซ์เลอร์ ดังนั้น ระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) ซึ่งประกอบด้วยสองระบบย่อย เป็นระบบที่เป็นบวก

เพื่อที่จะแสดงว่า ทั้งสองระบบย่อยของระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) เป็นระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งคู่ จึงกำหนดให้ $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์สถานะเริ่มต้นของระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) และพิจารณาจากรูปที่ 1 และรูปที่ 2 ดังต่อไปนี้



รูปที่ 1 แสดงแนววิถีสถานะของระบบย่อยที่หนึ่ง



รูปที่ 2 แสดงแนววิถีสถานะของระบบย่อยที่สอง

จากรูปที่ 1 และรูปที่ 2 ข้างต้น แสดงให้เห็นว่า เมื่อกำหนดเวกเตอร์สถานะเริ่มต้นดังกล่าว ซึ่งสอดคล้องกับการกำหนดให้เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \succeq 0$ ใด ๆ แล้วเมื่อเวลาผ่านไปหรือเวลาเพิ่มขึ้น ได้ส่งผลให้แนวโน้มสถานะของระบบย่อยที่หนึ่ง (โดยเฉพาะเส้นประสีแดง) และระบบย่อยที่สอง (โดยเฉพาะเส้นทึบสีน้ำเงิน) มีพฤติกรรมลู่ออกอย่างเห็นได้ชัด ดังนั้น ทั้งระบบย่อยที่หนึ่งและระบบย่อยที่สองเป็นบวกและไม่เสถียร

ต่อจากนั้น เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์

$$K = 1, \mu_1 = 0.55, \mu_2 = 0.54, \xi_1 = 0.41, \xi_2 = 0.2, \tau_{1,min} = 1, \tau_{2,min} = 2$$

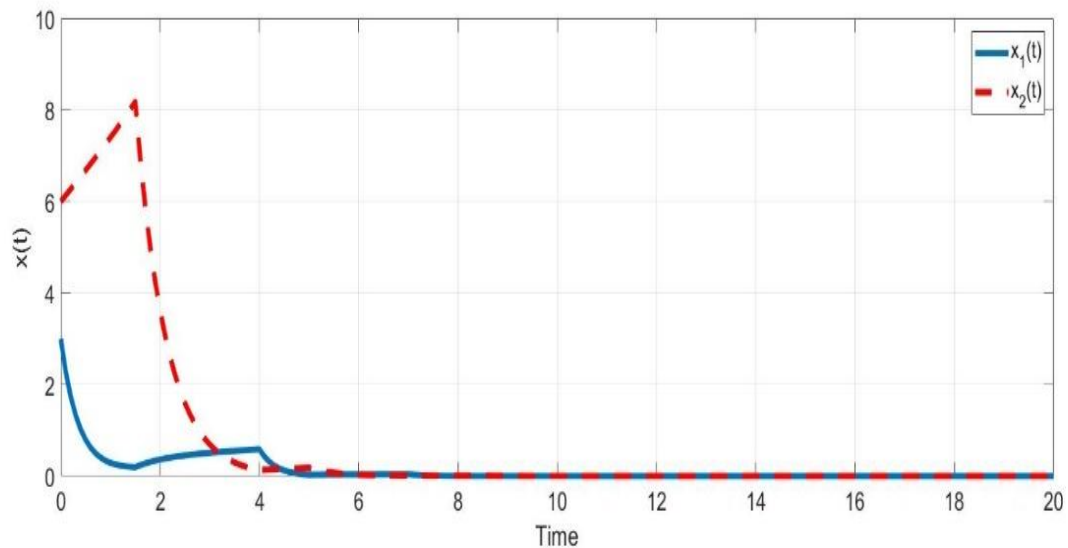
ซึ่งเป็นการกำหนดค่าพารามิเตอร์เป็นค่าคงที่ใด ๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมดในทฤษฎีบท 1 และจะได้ว่ามีเวกเตอร์ที่เป็นบวก

$$v_{1,0} = \begin{bmatrix} 36.6325 \\ 57.0269 \end{bmatrix}, \quad v_{1,1} = \begin{bmatrix} 131.7954 \\ 59.0737 \end{bmatrix}, \quad v_{2,0} = \begin{bmatrix} 70.8586 \\ 31.5394 \end{bmatrix}, \quad v_{2,1} = \begin{bmatrix} 66.6862 \\ 105.1124 \end{bmatrix}$$

และมีค่าคงที่

$$\tau_{1,max} = 1.5 \text{ และ } \tau_{2,max} = 2.5$$

ที่ทำให้เงื่อนไข (3) – (7) ในทฤษฎีบท 1 เป็นจริงทั้งหมด ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1 จึงสรุปได้ว่า ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) ซึ่งประกอบด้วยสองระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งคู่ มีความเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างภายใต้กฎการสลับเวลาที่ตีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย โดยที่ระบบย่อยที่หนึ่ง คือ $\Xi_{[1,1.5]}$ และระบบย่อยที่สอง คือ $\Xi_{[2,2.5]}$ ซึ่งจะเห็นได้ชัดจากรูปที่ 3 ดังนี้



รูปที่ 3 แสดงแนววิถีสถานะของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) ซึ่งประกอบด้วยสองระบบย่อยที่ไม่เสถียร ทั้งคู่ทำงานร่วมกันภายใต้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย $\Xi_{[1,1.5]}$ และ $\Xi_{[2,2.5]}$

จากรูปที่ 3 แสดงให้เห็นถึงผลลัพธ์เชิงตัวเลขของตัวอย่าง 1 นี้ว่า กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นอยู่กั แต่ละระบบย่อย โดยที่ระบบย่อยที่หนึ่ง คือ $\Xi_{[1,1.5]}$ และระบบย่อยที่สอง คือ $\Xi_{[2,2.5]}$ แล้วเมื่อเวลาผ่านไป หรือเวลาเพิ่มขึ้น ได้ส่งผลให้แนววิถีสถานะของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) มีพฤติกรรมลู่เข้าอย่างเห็น ได้ชัด นั่นคือ ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) ซึ่งประกอบด้วยสองระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งคู่ทำงานร่วมกัน มีความเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างภายใต้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย ทั้ง สองดังกล่าว ดังนั้น ผลลัพธ์เชิงตัวเลขของตัวอย่าง 1 สอดคล้องและเป็นไปตามผลลัพธ์ของทฤษฎีบท 1 ใน งานวิจัยนี้

บทที่ 5

สรุปและอภิปรายผล

5.1 อภิปรายผลการศึกษาค้นคว้าวิจัย

จากผลการวิจัยของตัวอย่าง 1 ในบทที่ 4 โดยเฉพาะรูปที่ 3 พบว่า แนววิถีสถานะของระบบ สลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) เกิดจากการใช้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นอยู่กับแต่ละระบบย่อย โดยที่ระบบย่อยที่หนึ่ง คือ $\Xi_{[1,1.5]}$ และระบบย่อยที่สอง คือ $\Xi_{[2,2.5]}$ กล่าวคือ ระบบย่อยที่หนึ่งจะทำงานในช่วงเวลาต่ำสุดเป็น 1.0 และสูงสุดไม่เกิน 1.5 ในขณะที่ระบบย่อยที่สองจะทำงานในช่วงเวลาต่ำสุดเป็น 2.0 และสูงสุดไม่เกิน 2.5 ซึ่งในตัวอย่าง 1 ในบทที่ 4 ได้เริ่มต้นจากให้ระบบย่อยที่หนึ่งทำงานจนถึงเวลาเป็น 1.5 และได้สลับมาให้ระบบย่อยที่สองทำงานต่อจากระบบย่อยที่หนึ่งจนกระทั่งถึงเวลาเป็น 4.0 และได้สลับกลับไปให้ระบบย่อยที่หนึ่งทำงานต่อ โดยการสลับการทำงานกันระหว่างระบบย่อยทั้งสองนี้ได้อยู่ภายใต้ช่วงเวลาที่ดีพอที่ขึ้นอยู่กับแต่ละระบบย่อยดังกล่าวจนกระทั่งสิ้นสุดที่เวลาเป็น 20.0 พบว่า แนววิถีสถานะของระบบ สลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) ของตัวอย่าง 1 ในบทที่ 4 มีพฤติกรรมลู่เข้าอย่างเห็นได้ชัด อย่างไรก็ตาม ค่าของฟังก์ชันไลปูนอฟแบบร่วมบวกมีการเพิ่มขึ้นในช่วงเวลาที่แต่ละระบบย่อยทำงาน เนื่องมาจากที่แต่ละระบบย่อยเป็นระบบที่ไม่เสถียร แต่การเพิ่มขึ้นของฟังก์ชันไลปูนอฟแบบร่วมบวกนี้จะถูกชดเชยโดยกฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นอยู่กับแต่ละระบบย่อยที่ได้ถูกออกแบบไว้ดังกล่าวข้างต้น ดังนั้น การลดลงของเวกเตอร์สถานะจึงเกิดขึ้นที่จุดเวลาที่มีการสลับการทำงานกันระหว่างระบบย่อยทั้งสอง ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (6) ของทฤษฎีบท 1 ในบทที่ 3 และอสมการเวกเตอร์ (10) ในบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 1 ในบทที่ 3 และในท้ายที่สุดค่าของฟังก์ชันไลปูนอฟแบบร่วมบวกได้ลู่เข้าสู่ศูนย์เมื่อสิ้นสุดเวลา ดังนั้น ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) ซึ่งประกอบด้วยสองระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งคู่ทำงานร่วมกัน มีความเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างภายใต้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อยทั้งสองดังกล่าว ซึ่งผลลัพธ์เชิงตัวเลขของตัวอย่าง 1 ในบทที่ 4 สอดคล้องและเป็นไปตามผลลัพธ์ของทฤษฎีบท 1 ในบทที่ 3 ของงานวิจัยนี้

นอกจากนี้ คณะวิจัยได้เปรียบเทียบกับระบบที่ถูกศึกษาในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) ภายใต้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อยเดียวกัน พบว่า ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) ที่ศึกษาในงานวิจัยนี้เป็นระบบไม่เชิงเส้น ในขณะที่ระบบที่พิจารณาในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) เป็นระบบสลับที่เป็นบวกเชิงเส้น และเป็นที่น่าสนใจได้ว่า ทฤษฎีบท 1 ในบทที่ 3 ของงานวิจัยนี้ ครอบคลุมทฤษฎีบท 1 ในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) กล่าวคือ ถ้ากำหนดให้ค่าคงที่ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ ของทฤษฎีบท 1 ในบทที่ 3 ของงานวิจัยนี้ แล้วเงื่อนไขทั้งหมด (3) – (7) ของทฤษฎีบท 1 ในบทที่ 3 ของงานวิจัยนี้จะเหมือนกับเงื่อนไข

ทั้งหมดของทฤษฎีบท 1 ในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) ดังนั้น ผลลัพธ์ทางทฤษฎีในงานวิจัยนี้จึงมีความเป็นทั่วไปมากกว่าผลลัพธ์ในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) ซึ่งสามารถเห็นได้ชัดจากตัวอย่างเชิงตัวเลขที่ได้ถูกนำเสนอไว้ในบทที่ 4 ของงานวิจัยนี้ นั่นคือ ผลลัพธ์ทางทฤษฎีในงานวิจัยนี้สามารถประยุกต์ใช้ได้กับผลลัพธ์ในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) เพียงกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ ของทฤษฎีบท 1 ในบทที่ 3 ของงานวิจัยนี้ เพื่อให้ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นกลายเป็นระบบสลับที่เป็นบวกเชิงเส้นแต่อย่างใดก็ตาม ผลลัพธ์ในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) ไม่สามารถประยุกต์ใช้ได้กับงานวิจัยนี้ เพราะระบบสลับที่ถูกศึกษาในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) เป็นระบบสลับที่เป็นบวกเชิงเส้น จึงไม่สามารถที่จะกำหนดให้มีค่าพารามิเตอร์ของการเป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น f ในระบบสลับ (1) ได้

5.2 สรุปผลการศึกษาค้นคว้าวิจัย

คณะผู้วิจัยได้ศึกษาเสถียรภาพของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นที่ซึ่งประกอบด้วยระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมดทำงานร่วมกัน โดยอาศัยการสร้างฟังก์ชันไลปูนอฟแบบร่วมบวกและกฎการสลับเวลาที่ตีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย ทั้งนี้คณะผู้วิจัยได้นำเสนอทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ใหม่ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอเพื่อยืนยันการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างของระบบที่ศึกษา และคณะผู้วิจัยได้เปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากงานวิจัยของ Feng et al., (2017) พบว่า งานวิจัยนี้มีความเป็นทั่วไปและสามารถประยุกต์ใช้งานได้มากกว่าผลลัพธ์ในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) ซึ่งสามารถเห็นได้ชัดจากตัวอย่างเชิงตัวเลขที่ได้ถูกนำเสนอไว้ในบทที่ 4 ดังนั้น ผลลัพธ์ทั้งหมดที่ได้จากงานวิจัยนี้แสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันไลปูนอฟแบบร่วมบวกและกฎการสลับที่ได้ถูกนำเสนอสามารถรับประกันการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นที่มีแต่ระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมดทำงานร่วมกัน และมีความเป็นทั่วไปมากกว่าวิธีที่มีอยู่ในวรรณกรรมเดิม นอกจากนี้ สำหรับงานวิจัยที่จะทำต่อไปในอนาคตสามารถต่อยอดไปสู่หัวข้อของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นที่มีตัวรบกวน (Disturbance) และขยายไปสู่การออกแบบตัวควบคุม (Controller) ให้แก่ระบบอีกด้วย

บรรณานุกรม

- Aleksandrov, A. Y., Chen, Y., Platonov, A. V., & Zhang, L. (2011). Stability analysis for a class of switched nonlinear systems. *Automatica*, 47(10), 2286-2291.
<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.08.016>
- Dong, Y., & Tian, Y. (2024). Stability and L1-gain analysis of switched positive systems with unstable subsystems and sector nonlinearities. *Journal of the Franklin Institute*, 361(18), 107255. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2024.107255>
- Feng, S., Wang, J., & Zhao, J. (2017). Stability and robust stability of switched positive linear systems with all modes unstable. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 6(1), 167-176. <https://doi.org/10.1109/JAS.2017.7510718>
- Knorn, F., Mason, O., & Shorten, R. (2009). On linear co-positive Lyapunov functions for sets of linear positive systems. *Automatica*, 45(8), 1943-1947.
<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2009.04.013>
- Mao, X., Zhu, H., Chen, W., & Zhang, H. (2019). New results on stability of switched continuous-time systems with all subsystems unstable. *ISA transactions*, 87, 28-33.
<https://doi.org/10.1016/j.isatra.2018.11.042>
- Shorten, R., Wirth, F., Mason, O., Wulff, K., & King, C. (2007). Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM review*, 49(4), 545-592. <https://doi.org/10.1137/05063516X>
- Tian, Y., & Sun, Y. (2019). Stability analysis of switched positive nonlinear systems by mode-dependent average dwell time method. *IEEE Access*, 7, 15584-15589.
<https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2894135>
- Xiang, W., Lam, J., & Shen, J. (2017). Stability analysis and L1-gain characterization for switched positive systems under dwell-time constraint. *Automatica*, 85, 1-8.
<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.07.016>
- Xiang, W., & Xiao, J. (2014). Stabilization of switched continuous-time systems with all modes unstable via dwell time switching. *Automatica*, 50(3), 940-945.
<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.12.028>
- Zhang, X., Sun, Y., & Zhu, X. (2025). Analysis of exponential stability and L1-gain performance of positive switched impulsive systems with all unstable subsystems. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 30, 1-19.
<https://doi.org/10.15388/namc.2025.30.38319>

- Zhang, J., Zhao, X., & Cai, X. (2016). Absolute exponential L1-gain analysis and synthesis of switched nonlinear positive systems with time-varying delay. *Applied Mathematics and Computation*, 284, 24-36. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.02.050>
- Zhao, H., & Li, Y. (2017, July). Exponential stability of switched positive linear systems without stable subsystems. In 2017 4th International Conference on Information Science and Control Engineering (ICISCE) (pp. 984-988). IEEE. <https://doi.org/10.1109/ICISCE.2017.208>.

ประวัติผู้วิจัย (1)

ชื่อ - สกุล	สุริยล ยิ้มเนตร
ประวัติการศึกษา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์, 2554 วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2557 ปรัชญาดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2563
ที่อยู่ปัจจุบัน	215/11 หมู่ที่ 5 ตำบลงมูลเหล็ก อำเภอเมืองเพชรบูรณ์ จังหวัดเพชรบูรณ์ 67000
สถานที่ทำงาน	สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์
ตำแหน่งปัจจุบัน	อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

ประวัติผู้วิจัย (2)

ชื่อ - สกุล	อิสรา โสตา
ประวัติการศึกษา	ประถมศึกษาตอนต้น จากโรงเรียนบ้านสระแก้ว, 2557 ประถมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนบ้านสันเจริญ, 2560 มัธยมศึกษา จากโรงเรียนท่าดัวงพิทยาคม, 2566
ที่อยู่ปัจจุบัน	125 หมู่ 5 ตำบลท่าดัวง อำเภอหนองไผ่ จังหวัดเพชรบูรณ์ 67140
สถานที่ทำงาน	สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์
ตำแหน่งปัจจุบัน	นักศึกษาชั้นปีที่ 2 ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์