



รายงานการวิจัย

สมบัติบางประการของเซตเปิดเล็กสุดนาโนและใหญ่สุดนาโน

More some properties of minimal and maximal nano open sets

อาดุลย์ จงรักษ์

สาขาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ประจำปีงบประมาณ 2565

รหัสโครงการ

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

สมบัติบางประการของเซตเปิดเล็กสุดนาโนและใหญ่สุดนาโน

More some properties of minimal and maximal nano open sets

อาตุลย์ จงรักษ์

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ทุนอุดหนุนโดย งบประมาณส่วนตัวและผ่านความเห็นชอบจากมหาวิทยาลัยราชภัฏ
เพชรบูรณ์ ประเภทโครงการวิจัยและนวัตกรรมเพื่อสร้างความเป็นเลิศทางวิชาการ

ประจำปีงบประมาณ 2565

(ก)

ชื่องานวิจัย สมบัติบางประการของเซตเปิดเล็กสุดนาโนและใหญ่สุดนาโน
ผู้วิจัย อาดุลย์ จงรักษ์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ ปีเสร็จวิจัย 2565

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนิยามเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตเปิดใหญ่สุดนาโนพร้อมทั้งศึกษาสมบัติของเซตดังกล่าวในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และศึกษาสมบัติของสัจพจน์การแยกบางสัจพจน์ในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน

คำสำคัญ : ทอพอโลยีนาโน, เซตเปิดเล็กสุดนาโน, เซตเปิดใหญ่สุดนาโน

(๗)

Research 's Title	More some properties of minimal and maximal nano open sets
Researcher	Ardoon Jongrak
Department	Mathematics
	Phetchabun Rajabhat University Year 2022

Abstract

The purpose of this work is to introduce and study some properties of minimal and maximal nano open sets, some separation axioms in nano topological spaces.

Keywords : nano topology, minimal nano open sets, maximal nano open sets.

(ค)

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณสาขาวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคำนวณ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ ที่ให้ความอนุเคราะห์อุปกรณ์และวัสดุสำนักงาน เป็นการส่งเสริมและสนับสนุนในการพัฒนาด้านวิชาการประจำปีงบประมาณ 2565

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. เกียรติศักดิ์ รัตนสีหา รองศาสตราจารย์สมเกียรติ ชัยพรเจริญศรี และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สัจจรักษ์ ลาตสูงเนิน ที่ได้ให้ความอนุเคราะห์เป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบความถูกต้อง ความสมบูรณ์ของเนื้อหาในโครงการวิจัย

ท้ายที่สุดนี้ ขอขอบคุณผู้ให้ความช่วยเหลือและคำแนะนำจากผู้ที่เกี่ยวข้องทุกท่าน ตลอดจนบิดา มารดาและสมาชิกในครอบครัวทุกคนที่คอยเป็นกำลังใจ ให้การสนับสนุนทุกอย่างที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยทั้งทางตรงและทางอ้อม จนงานวิจัยนี้สำเร็จลงได้

อาดุลย์ จงรักษ์

10 มีนาคม 2566

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ข
กิตติกรรมประกาศ.....	ค
สารบัญ.....	ง
สารบัญตาราง.....	ฉ
สารบัญภาพ.....	ช
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์.....	2
1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	2
1.4 ขอบเขตการวิจัย.....	2
1.5 นิยามศัพท์ที่เกี่ยวข้อง.....	2
1.6 กรอบแนวคิดในการวิจัย.....	3
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	4
2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	4
2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	8
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	10
3.1 การศึกษาความรู้พื้นฐานและการกำหนดสัญลักษณ์ที่เกี่ยวข้อง.....	10
3.2 บทนิยามเซตเปิด(ปิด)เล็กสุดนาโนและเซตเปิด(ปิด)ใหญ่สุดนาโน.....	11
3.3 ความสัมพันธ์ของเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตเปิดใหญ่สุดนาโน.....	12
3.4 ความสัมพันธ์ของเซตปิดใหญ่สุดนาโนและเซตปิดเล็กสุดนาโน.....	14
3.5 ความสัมพันธ์ของเซตเปิด(ปิด)ใหญ่สุดนาโนและเซตเปิด(ปิด)เล็กสุดนาโน.....	14
3.6 ตัวอย่างประกอบบทนิยาม การพิสูจน์ทฤษฎีบท และผลสรุปการวิจัย.....	15

	หน้า
บทที่ 4 ผลการวิจัย.....	16
4.1 สมบัติของเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตเปิดใหญ่สุดนาโน.....	16
4.2 สมบัติของเซตปิดเล็กสุดนาโนและเซตปิดใหญ่สุดนาโน.....	25
บทที่ 5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	29
5.1 สรุปผลการวิจัย.....	29
5.2 อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	32
บรรณานุกรม.....	33
ประวัติผู้วิจัย.....	34

(น)

สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่	
4.1.1 แสดงเซต A เป็นเซตย่อยของ B เมื่อ A, B เป็นเซตเปิดนาคโน.....	17
4.1.2 แสดงเซต E เป็นเซตย่อยของ F เมื่อ E, F เป็นเซตปิดนาคโน.....	25

(ช)

สารบัญภาพ

	หน้า
ภาพที่	
1.1 กรอบแนวคิดในการทำวิจัย.....	3

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

การคิดค้นทฤษฎีเพื่อได้องค์ความรู้ใหม่ ๆ นั้นนับว่ามีประโยชน์เป็นอย่างมากต่อทางวิชาการและการพัฒนาประเทศและเป็นสิ่งที่ยอมรับกันว่าทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆ ที่เกิดจากการวิจัยนั้นมีประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาความรู้เชิงวิชาการในสาขานั้นๆ อีกทั้งยังสามารถนำไปประยุกต์ในสาขาอื่นๆ ด้วย สำหรับการประยุกต์ในสาขาคณิตศาสตร์เองนั้นได้ถูกนำไปเป็นพื้นฐานสำคัญในการพัฒนาทางวิทยาศาสตร์พื้นฐาน (Basic science) อันถือเป็นพื้นฐานในการพัฒนาประเทศชาติอย่างยั่งยืนต่อไป

เนื่องด้วยคณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่มุ่งถ่ายทอดความรู้เชิงวิทยาศาสตร์ผสมผสานกับกระบวนการคิดเชิงตรรกและเชิงวิเคราะห์ การศึกษาวิชาคณิตศาสตร์แขนงทอพอโลยี (Topology) เรื่องเซตเปิดและเซตปิด (open sets or closed sets) ถูกหยิบยกขึ้นมาศึกษาอยู่เสมอ โดยเฉพาะเซตเปิดและเซตปิดแบบต่างๆ เช่น ในปี ค.ศ. 2001 นาคาโอกะ และ โอตะ (Nakaoka and Oda) ศึกษาเซตเปิดเล็กสุด (minimal open sets) ในปี ค.ศ. 2011 เบนชาลไล ไอทานากิ และ วาลิ (Benchalli, Ittanagi and Wali) เป็นผู้มาสร้างปริภูมิใหม่จากเซตเปิดเล็กสุด อีกทั้งศึกษาฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับเซตเปิดเล็กสุด ซึ่งต่อมาในปี ค.ศ. 2017 มุการ์ยี (Mukharjee) เป็นคนพัฒนาและประยุกต์ เซตเปิดเล็กสุด ด้วยการสร้างสัจพจน์การแยก ปี ค.ศ. 2013 เลลลิส ไชวการ์ และคาร์เมล ริชาร์ด (Lellis Thivagar and Carmel Richard) เป็นผู้นำเสนอเซตเปิดนาโน (nano open sets) ในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ซึ่งเป็นการศึกษาสมบัติพื้นฐานของเซตเปิดนาโนและบางฟังก์ชันที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยจึงใช้แนวคิดดังกล่าวในการนิยามและศึกษาเซตเปิดแบบต่างๆ ในปริภูมิเชิงทอพอโลยี และในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน อีกทั้งศึกษาสมบัติพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับเซตเปิดดังกล่าว ในการเสนองานวิจัยเรื่องเซตเปิดเล็กสุด ในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ประโยชน์ที่จะได้รับจากงานวิจัยนี้คือได้สมบัติต่างๆ ของเซตเปิดเล็กสุด อันประกอบด้วยบทนิยาม ตัวอย่าง ทฤษฎีบท อันเป็นองค์ความรู้ใหม่ทางด้านสาขาวิชาคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การตีพิมพ์เผยแพร่วารสารระดับชาติและ

นานาชาติ เป็นแนวทางให้ผู้สนใจงานวิจัยทางด้านวิจัยพื้นฐาน การทำงานวิจัยเพื่อต่อยอด และเพื่อเป็นพื้นฐานในการประยุกต์ใช้ในด้านคณิตศาสตร์หรือศาสตร์อื่นที่เกี่ยวข้องต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์

สำหรับงานวิจัยในครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ

1.2.1 สร้างบทนิยามของเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตเปิดใหญ่สุดนาโนในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน

1.2.2 กิดค้นทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ เกี่ยวกับสมบัติเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตเปิดใหญ่สุดนาโน เป็นการขยายแนวคิดจากงานของ เลลลิส ไชวาการ์ และคาร์เมล ริชาร์ด

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ผลการวิจัยทำให้เกิดประโยชน์ด้านวิชาการ เนื่องจากการวิจัยในครั้งนี้มุ่งเน้นการสร้างองค์ความรู้ใหม่ เกี่ยวกับสมบัติเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตเปิดใหญ่สุดนาโน

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

1.4.1 ข้อมูลสำหรับการศึกษากำหนดเป็นเอกสาร ตำรา ผลงานวิจัยและวารสาร ที่เกี่ยวข้องกับทอพอโลยีทั่วไป (general topology)

1.4.2 แหล่งข้อมูลจากห้องสมุดคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยในประเทศไทยและอินเทอร์เน็ต ซึ่งเก็บรวบรวมด้วยตนเอง

1.4.3 ขอบเขตระยะเวลาที่ศึกษา ตลอดปีการศึกษา 2565

1.5 นิยามศัพท์ที่เกี่ยวข้อง

ศัพท์ที่เกี่ยวข้องในงานวิจัยนี้ใช้ตามรูปแบบของ Lellis Thivaga and Carmel Richard ที่ตีพิมพ์ในวารสาร Mathematical theory and modeling ปีที่3 เล่มที่7 ปีค.ศ. 2013 หน้า 32-37

ทอพอโลยีนาโน หมายถึง เซตของเซตย่อยเอกภพสัมพัทธ์ $U \neq \emptyset$ ที่มีสมบัติปิดภายใต้ผลตัดแบบจำกัด มีสมบัติปิดภายใต้ผลผนวกแบบใดๆ และ $U, \emptyset$ เป็นสมาชิกของทอพอโลยีนาโน และเรียกสมาชิกของทอพอโลยีนาโนว่า เซตเปิดนาโน

เซตเปิดเล็กสุดนาโน หมายถึง เซตซึ่งเป็นสมาชิกของทอพอโลยีนาโนที่สมาชิกล่างกล่าวหรือเซตว่างเท่านั้นที่เป็นเซตย่อยของเซตนั้น

เซตเปิดใหญ่สุดนาโน หมายถึง เซตซึ่งเป็นสมาชิกของทอพอโลยีนาโนที่สมาชิกล่างกล่าวหรือเอกภพสัมพัทธ์ เท่านั้นที่เป็นเซตย่อยของเซตนั้น

1.6 กรอบแนวคิดในการทำวิจัย

การศึกษาเกี่ยวกับสมบัติบางประการของเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตเปิดใหญ่สุดนาโน ผู้วิจัยกำหนดสัญลักษณ์ที่เกี่ยวข้องดังนี้

$\tau_R(X)$ แทน ทอพอโลยีนาโน

$(U, \tau_R(X))$ แทน ปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน

$NO(U)$ แทนเซตของเซตเปิดนาโนในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน

$N\eta(x)$ แทนเซตของย่านใกล้เคียงนาโนของ x

$N_{int}(A)$ แทนจุดภายในนาโนของเซต A

$Ncl(A)$ แทนส่วนปิดคลุมนาโนของเซต A

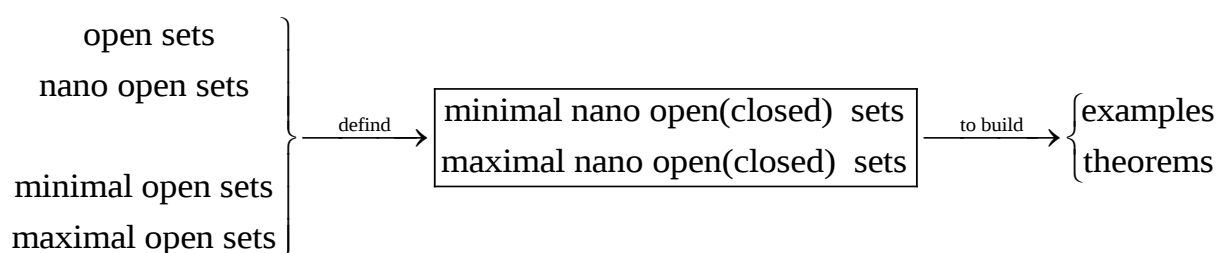
$m_i NO(U)$ แทนเซตของเซตเปิดเล็กสุดนาโนในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน

$M_u NO(U)$ แทนเซตของเซตเปิดใหญ่สุดนาโนในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน

$m_i NC(U)$ แทนเซตของเซตปิดเล็กสุดนาโนในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน

$M_u NC(U)$ แทนเซตของเซตปิดใหญ่สุดนาโนในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน

สำหรับการศึกษาในครั้งนี้ผู้วิจัยกำหนดบทนิยามของเซตเปิด(ปิด)เล็กสุดนาโนและเซตเปิด(ปิด)ใหญ่สุดนาโน ตัวอย่างประกอบและ คัดค้านทฤษฎีเกี่ยวข้องด้วยกรอบแนวคิดของการวิจัยดังภาพที่ต่อไปนี้



ภาพที่ 1.1 กรอบแนวคิดในการวิจัย

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บทนี้ผู้วิจัยนำเสนอทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสมบัติการประการของเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตเปิดใหญ่สุดนาโน

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในหัวข้อ 2.1.1 และ 2.1.2 เป็นการนำเสนอความรู้เกี่ยวกับปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ผู้ศึกษาคนแรกในปี ค.ศ. 2013 คือ เลลลิส ไธวาการ์ และคาร์เมล ริชาร์ด (Lellis Thivagar and Carmel Richard, งานวิจัยเรื่อง On nano continuity)

2.1.1 ปริภูมิการประมาณค่า

2.1.1.1 ความหมายของปริภูมิการประมาณค่า

สำหรับ U เป็นเซตจำกัดของอ็อบเจกต์ที่ไม่เป็นเซตว่าง (non-empty finite set of object) เรียกว่าเอกภพสัมพัทธ์ (universe) R ความสัมพันธ์สมมูลบน U ซึ่ง ความสัมพันธ์นี้จะไม่กำหนดไว้ให้เห็น (indiscernibility relation) และเรียกคู่อันดับ (X, U) ว่าปริภูมิการประมาณค่า (approximation space) สำหรับ $X \subseteq U$, $\forall x \in U$ สัญญลักษณ์ $R(x)$ หมายถึง ชั้นสมมูลของ x ภายใต้ความสัมพันธ์ R

(1) ค่าประมาณล่าง (lower approximation) ของ X เทียบกับ R หมายถึง

$$L_R(X) = \bigcup_{x \in U} \{R(x) \mid R(x) \subseteq X\}$$

(2) ค่าประมาณบน (upper approximation) ของ X เทียบกับ R หมายถึง

$$U_R(X) = \bigcup_{x \in U} \{R(x) \mid R(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

(3) บริเวณขอบ (boundary region) ของ X เทียบกับ R หมายถึง

$$B_R(X) = U_R(X) - L_R(X)$$

2.1.1.2 สมบัติพื้นฐานของปริภูมิการประมาณค่า

สำหรับปริภูมิการประมาณค่า (X, U) ที่ $X, Y \subseteq U$ จะได้ว่าข้อต่อไปนี

$$(1) L_R(X) \subseteq X \subseteq U_R(X)$$

$$(2) L_R(\emptyset) = U_R(\emptyset) = \emptyset$$

$$(3) L_R(U) = U_R(U) = U$$

- (4) $U_R(X \cup Y) = U_R(X) \cup U_R(Y)$
- (5) $U_R(X \cap Y) \subseteq U_R(X) \cap U_R(Y)$
- (6) $L_R(X \cup Y) \supseteq L_R(X) \cup L_R(Y)$
- (7) $L_R(X \cap Y) = L_R(X) \cap L_R(Y)$
- (8) ถ้า $X \subseteq Y$ แล้ว $L_R(X) \subseteq L_R(Y)$ และ $U_R(X) \subseteq U_R(Y)$
- (9) $U_R(U - X) = U - L_R(X)$ และ $L_R(U - X) = U - U_R(X)$
- (10) $U_R(U_R(X)) = L_R(U_R(X)) = U_R(X)$
- (11) $L_R(L_R(X)) = U_R(L_R(X)) = L_R(X)$

2.1.2 ปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน

2.1.2.1 ความหมายของปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน

กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ U และเป็น R ความสัมพันธ์สมมูลบน U เมื่อ $X \subseteq U$, $\forall x \in U$ เช่นเดียวกับหัวข้อ 2.1.1 ซึ่ง $\tau_R(X) = \{U, \phi, L_R(X), U_R(X), B_R(X)\}$ เป็นทอพอโลยีบน U เทียบกับ X และเรียก $\tau_R(X)$ ว่าทอพอโลยีนาโน และเรียก $(U, \tau_R(X))$ ว่าปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน สำหรับ $A \in \tau_R(X)$ เรียก A ว่าเซตเปิดนาโนใน U และเรียกสมาชิกใน $[\tau_R(X)]^c$ ว่าเซตปิดนาโนใน U นั่นคือ คอมพลีเมนต์ของเซตเปิดนาโน A (หรือ $X - A$ หรือ A^c) เป็นเซตปิดนาโน

ต่อไปเราจะให้ความหมายของย่านใกล้เคียงนาโน จุดภายในนาโนและส่วนปิดคลุมนาโนในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน $(U, \tau_R(X))$

(1) สำหรับ $W \subseteq U$ เราเรียก U ว่าย่านใกล้เคียงนาโน (nano neighbourhood) ของเซตย่อย A ใน U ถ้ามีเซตเปิดนาโน $G \subseteq U$ ที่ $A \subseteq G \subseteq W$ เมื่อ $A = \{x\}$ เรากล่าวว่า W เป็นย่านใกล้เคียงนาโนของ x และเซตของย่านใกล้เคียงนาโนของ x เขียนแทนด้วย $N\eta(x)$

(2) สำหรับ $A \subseteq U$ และ $x \in X$ เราเรียก x ว่าจุดภายในนาโน (nano interior point) ของเซต A ถ้ามีเซตเปิดนาโน $G \subseteq U$ ที่บรรจุ x ซึ่ง $x \in G \subseteq A$ เขียนเซตของจุดภายในนาโนทั้งหมดของ A ด้วยสัญลักษณ์ $Nint(A)$

ดังนั้น $x \in Nint(A)$ แสดงว่า $A \in N\eta(x)$ นั่นคือ $Nint(A) = \{x \in U \mid A \in N\eta(x)\}$

(3) สำหรับ $A \subseteq U$ ส่วนปิดคลุมนาโน (nano closure) ของ A เขียนแทนด้วย $Ncl(A)$ หมายถึง $Ncl(A) = \{x \in U \mid W \cap A \neq \phi, \forall W \in N\eta(x)\}$

2.1.2.2 สมบัติพื้นฐานของเซตของจุดภายในนาโนและส่วนปิดคลุมนาโน

เมื่อกำหนดให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และ $A, B \subseteq U$ จะได้ว่า

- (1) $Nint(A) \subseteq A$
- (2) $Nint(A)$ คือเซตเปิดนาโนที่ต่อเมื่อ $A = Nint(A)$
- (3) $Nint(A)$ คือเซตเปิดนาโนที่ใหญ่ที่สุด (largest) ที่เป็นเซตย่อยของ A
- (4) $Nint(A) = \cup \{G \subseteq X \mid G \in NO(U), G \subseteq A\}$
- (5) $Nint(Nint(A)) = Nint(A)$
- (6) $A \subseteq Ncl(A)$
- (7) A เป็นเซตปิดนาโน ก็ต่อเมื่อ $A = Ncl(A)$
- (8) $Ncl(A)$ เป็นเซตปิดนาโนที่เล็กที่สุด (smallest) ที่บรรจุ A
- (9) $Ncl(A) = \cap \{F \subseteq X \mid F \in NC(U), A \subseteq F\}$
- (10) $Ncl(Ncl(A)) = Ncl(A)$
- (11) ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $Nint(A) \subseteq Nint(B)$ และ $Ncl(A) \subseteq Ncl(B)$
- (12) $Nint(A) \cup Nint(B) \subseteq Nint(A \cup B)$
และ $Ncl(A \cup B) = Ncl(A) \cup Ncl(B)$
- (13) $Nint(A) \cap Nint(B) = Nint(A \cap B)$
และ $Ncl(A \cap B) \subseteq Ncl(A) \cap Ncl(B)$
- (14) $U - Nint(A) = Ncl(U - A)$ และ $Nint(U - A) = U - Ncl(A)$

2.1.3 ความหมายของเซตเปิดเล็กสุดนาโน เซตเปิดใหญ่สุดนาโน เซตปิดเล็กสุดนาโนและเซตปิดใหญ่สุดนาโน

สำหรับหัวข้อนี้จะอ้างอิงถึงบทความของเลลลิส ธิวาการ์ คาวิช และอีแวนเจไลน์ คริสตินา (Lellis Thivagar, M., Kavith, J., and Evangeline Kristina Lily, D) ในปีค.ศ.2021

กำหนดให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโนและ A, H, G, E, F เป็นเซตย่อยแท้ที่ไม่เป็นเซตว่างของ U

(1) จะเรียก A ว่าเซตเปิดเล็กสุดนาโน (minimal nano open set) ถ้าเซตเปิดนาโนที่ถูกบรรจุใน A คือ ϕ หรือ A เท่านั้น เราเขียนแทนเซตของเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U ด้วย $m_1NO(U)$ นั่นคือ $A \in m_1NO(U)$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับสำหรับทุกๆ $H \in NO(U)$ ที่ $H \subseteq A$ จะได้ว่า $H = \phi$ หรือ $H = A$

(2) จะเรียก A ว่าเซตเปิดใหญ่สุดนาโน (maximal nano open set) ถ้าเซตเปิดนาโนที่บรรจุ A คือ U หรือ A เท่านั้น เซตของเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U เขียนแทนด้วย $M_1NO(U)$

นั่นคือ $A \in M_aNO(U)$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับสำหรับทุกๆ $G \in NO(U)$ ที่ $A \subseteq G$ จะได้ว่า $G = U$ หรือ $G = A$

(3) จะกล่าวว่า F เป็นเซตปิดใหญ่สุดนาโน (nano maximal closed set) ก็ต่อเมื่อ เซตปิดนาโนใดๆที่บรรจุ F คือ U หรือ F นั่นคือ ถ้า E เป็นเซตปิดนาโนซึ่ง $F \subseteq E$ แล้ว $E = U$ หรือ $E = F$ เขียนแทนเซตของเซตปิดเล็กสุดนาโนใน U ด้วย $m_iNC(U)$

(4) จะกล่าวว่า F เป็นเซตปิดเล็กสุดนาโน (nano minimal closed set) ก็ต่อเมื่อ เซตปิดนาโนใดๆที่ถูกบรรจุใน F คือ F หรือ ϕ นั่นคือ ถ้า E เป็นเซตปิดนาโนซึ่ง $E \subseteq F$ แล้ว $F = E$ หรือ $E = \phi$ เซตของเซตปิดใหญ่สุดนาโนใน U เขียนแทนด้วย $M_aNC(U)$

ตัวอย่าง 2.1 [6] ให้ $U = \{p, q, r, s\}$ ซึ่ง $U/R = \{\{p\}, \{q\}, \{r, s\}\}$ และ $X = \{p, r\} \subseteq U$ จะได้ว่า ทอพอโลยีนาโน $\tau_R(X) = \{\phi, \{p\}, \{r, s\}, \{p, r, s\}, U\}$ จงหาเซตเปิดเล็กสุดนาโน เซตเปิดใหญ่สุดนาโน เซตปิดเล็กสุดนาโน และ เซตปิดใหญ่สุดนาโน

วิธีทำ เนื่องจากเซตเปิดนาโนที่ไม่ใช่เซตว่างได้แก่ $\{p\}, \{r, s\}, \{p, r, s\}$ และ U

พิจารณา $\{p\}$

เพราะว่าเซตเปิดนาโนที่เป็นเซตย่อยของ $\{p\}$ มีเพียง $\{p\}$ และ ϕ เท่านั้น ทำให้ $\{p\} \in m_iNO(U)$

พิจารณา $\{r, s\}$

เพราะว่าเซตเปิดนาโนที่เป็นเซตย่อยของ $\{r, s\}$ มีเพียง $\{r, s\}$ และ ϕ เท่านั้น ทำให้

$\{r, s\} \in m_iNO(U)$

พิจารณา $\{p, r, s\}$

เพราะว่าเซตเปิดนาโนที่เป็นเซตย่อยของ $\{p, r, s\}$ ได้แก่ $\{p\}, \{r, s\}, \{p, r, s\}$ และ ϕ โดยที่

$\{p\} \subseteq \{p, r, s\}$ ทำให้ $\{p, r, s\} \notin m_iNO(U)$

ดังนั้นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U ได้แก่ $\{p\}, \{r, s\}$

พิจารณา $\{p\}$

เพราะว่าเซตเปิดนาโนที่ $\{p\}$ เป็นเซตย่อยได้แก่ $\{p\}, \{p, r, s\}$ และ U ทำให้ $\{p\} \notin M_aNO(U)$

พิจารณา $\{r, s\}$

เพราะว่าเซตเปิดนาโนที่ $\{r, s\}$ เป็นเซตย่อย มี $\{r, s\}, \{p, r, s\}$ และ U ทำให้

$\{p, r\} \notin M_aNO(U)$

พิจารณา $\{p, r, s\}$

เพราะว่าเซตเปิดนาโนที่ $\{p, r, s\}$ เป็นเซตย่อยมีเพียง $\{p, r, s\}$ และ U ทำให้

$\{p, r, s\} \notin M_aNO(U)$ ดังนั้นเซตปิดใหญ่สุดนาโนใน U คือ $\{p, r, s\}$

เนื่องจากเซตปิดนาโนที่ไม่ใช่เซตว่างได้แก่ $\{q\}$, $\{p,q\}$, $\{q,r,s\}$ และ U ดำเนินการในทำนองเดียวกันจะได้ว่า เซตปิดเล็กสุดนาโนใน U คือ $\{q\}$ และเซตปิดใหญ่สุดนาโนใน U คือ $\{p,q\}$ และ $\{q,r,s\}$

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เบนชาไล โอธานากิ และวิลเลียม เขียนบทความวิจัยเรื่อง On minimal open sets and maps in topological spaces งานที่เป็นบทความวิจัยที่สองของเลลิส ไชวาการ์ และคาร์เมล ริชาร์ด เรื่อง On nano continuity ตามด้วยผลงานวิจัยของ เลลิส ไชวาการ์ คาวิช และอีแวนเจลไลน์ คริสตินา เรื่อง Minimal and Maximal Open Sets in Nano Topological Spaces โดยเฉพาะเรื่องที่สามได้ทำการศึกษาสมบัติต่างๆของเซตเปิดเล็กสุดนาโน เซตเปิดใหญ่สุดนาโน เซตปิดเล็กสุดนาโน และเซตปิดใหญ่สุดนาโน ในปีค.ศ.2021 สามารถสรุปได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.2.1 ให้ $(U, \tau_r(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และ $A, B, C \subseteq U$ จะได้ว่า

- (1) ถ้า A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนและ B เป็นเซตเปิดนาโนแล้ว $A \cap B = \emptyset$ หรือ $A \subset B$ อย่างใดอย่างหนึ่ง
- (2) ถ้า A และ C เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโน แล้ว $A \cap C = \emptyset$ หรือ $A = C$

ทฤษฎีบท 2.2.2 ให้ $(U, \tau_r(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโนและ A ไม่ใช่เซตว่างซึ่งเป็นเซตเปิดนาโนใน U จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- (1) A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U
- (2) $A \subset Ncl(B)$ สำหรับแต่ละ $B \subset A$ ที่ $B \neq \emptyset$
- (3) $Ncl(A) = Ncl(B)$ สำหรับแต่ละ $B \subset A$ ที่ $B \neq \emptyset$

ทฤษฎีบท 2.2.3 ให้ $(U, \tau_r(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U และ $G \subset A$ ซึ่ง G ไม่ใช่เซตว่างใน U ถ้ามีย่านใกล้เคียงนาโน W ของ G ซึ่ง W เป็นเซตเปิดนาโนใน U และ $W \subset Ncl(A)$ แล้ว $G \cup B$ เป็นเซตพรีเปิดนาโน สำหรับทุกๆ $B \subset A$ ซึ่ง B ไม่ใช่เซตว่าง

ทฤษฎีบท 2.2.4 ให้ $(U, \tau_r(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U และ $G \subset U$ ซึ่ง G ไม่ใช่เซตว่าง ถ้ามีย่านใกล้เคียงนาโน W ของ G ซึ่ง W เป็นเซตเปิดนาโนใน U และ $W \subset Ncl(G \cup A)$ แล้ว $G \cup B$ เป็นเซตพรีเปิดนาโน สำหรับทุกๆ $B \subset A$ ซึ่ง B ไม่ใช่เซตว่าง

หมายเหตุ จะกล่าวว่า A เป็นเซตพรีเปิดนาโน (nano pre open set) ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq Nint(Ncl(A))$

ทฤษฎีบท 2.2.5 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และ $A, B, C \subseteq U$ จะได้ว่า

- (1) ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและ B เป็นเซตเปิดนาโนแล้ว $A \cup B = U$ หรือ $B \subset A$ อย่างใดอย่างหนึ่ง
- (2) ถ้า A และ C เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนซึ่ง $A \neq C$ แล้ว $A \cup C = U$

ทฤษฎีบท 2.2.6 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและเซตปิดเล็กสุดนาโน B เป็นเซตเปิดนาโนและ F เป็นเซตปิดนาโนใน U แล้วข้อต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) $B \subset A \subset F$
- (2) $A \subset B$ และ $A \cap F = \emptyset$
- (3) $A \cup B = U$ และ $A \subset F$
- (4) $A \cup B = U$ และ $A \cap F = \emptyset$

บทที่ 3

วิธีดำเนินงานวิจัย

การวิจัยนี้เราศึกษาเกี่ยวกับศึกษาสมบัติเพิ่มเติมบางประการของเซตปิดเล็กสุดนาโน เซตปิดใหญ่สุดนาโน เซตเปิดเล็กสุดนาโน และเซตเปิดใหญ่สุดนาโนตามแนวคิดของ เบนชาลไล, ไอทานากิ และวาไล ที่กล่าวถึงเซตเปิดเล็กสุด และการส่งในปริภูมิทอพอโลยี รวมทั้งศึกษาบทความวิจัยของเลลลิส ไชวาการ์, คาวิช และอีแวนเกไลน์ คริสตินา โดยผู้วิจัยมีระเบียบวิธีดำเนินการวิจัยตามหัวข้อได้แก่ การศึกษาความรู้พื้นฐานพร้อมทั้งกำหนดสัญลักษณ์และข้อตกลงเบื้องต้นศึกษาเซตเปิดเล็กสุดและเซตเปิดใหญ่สุดในปริภูมิทอพอโลยี ศึกษาปริภูมิทอพอโลยีนาโน สร้างบทนิยามเซตเปิดใหญ่สุดนาโน เซตเปิดเล็กสุดนาโน เซตปิดเล็กสุดนาโน และเซตปิดใหญ่สุดนาโนในปริภูมิทอพอโลยีนาโน พร้อมทั้งตัวอย่างของเซตดังกล่าว ศึกษาความสัมพันธ์ของเซตต่างๆที่กล่าวข้างต้น และหัวข้อสุดท้ายเป็นการสรุปผลการวิจัย

3.1 การศึกษาความรู้พื้นฐานและการกำหนดสัญลักษณ์ที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยนี้ใช้ความรู้เกี่ยวกับเรื่อง สมบัติของเซต เซตเปิด ย่านใกล้เคียง เซตปิด ปริภูมิทอพอโลยี ซึ่งศึกษาจากตำราทอพอโลยี สำหรับเซตเปิดเล็กสุดในปริภูมิทอพอโลยี ศึกษาจากเอกสารอ้างอิงในบรรณานุกรมอันเป็นบทความวิจัยของ Benchalli, S.S., Ittanagi, M., and Wali, R. S. ชื่อ **On minimal open sets and maps in topological spaces** ในวารสาร *Journal of computer and mathematical sciences*. ปีที่ 2 เล่มที่ 2 ปีค.ศ. 2011 หน้า 170-398. สำหรับปริภูมิทอพอโลยีนาโน ศึกษาจากเอกสารอ้างอิงในบรรณานุกรมซึ่งเป็นบทความวิจัยของ Lellis Thivagar, M., and Carmel Richard. (2013) ชื่อ **On nano continuity** ในวารสาร *Mathematical theory and modeling* ปีที่ 3 เล่มที่ 7 ปีค.ศ. 2013 หน้า 32-37

การกำหนดสัญลักษณ์ที่เกี่ยวข้องสำหรับเอกสารงานวิจัย

$A \subseteq B$ แทน เซต A เป็นเซตย่อยของเซต B

$A \subset B$ แทน เซต A เป็นเซตย่อยแท้ของเซต B

$A \cup B$ แทน ผลผนวกของเซต A กับเซต B

$A \cap B$ แทน ผลตัดของเซต A กับเซต B

$A - B$ แทน ผลต่างของเซต A กับเซต B

$U - A, A^c$ แทน คอมพลีเมนต์ของเซต A เมื่อ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์

τ แทน ทอพอโลยี
 (X, τ) แทน ปริภูมิเชิงทอพอโลยี
 $O(X, \tau)$ แทนเซตของเซตเปิดในปริภูมิเชิงทอพอโลยี (X, τ)
 $C(X, \tau)$ แทนเซตของเซตปิดในปริภูมิเชิงทอพอโลยี (X, τ)
 $\eta(x)$ แทนเซตของย่านใกล้เคียงของ x
 $\text{int}(A)$ แทนจุดภายในของเซต A
 $cl(A)$ แทนส่วนปิดคลุมนาโนของเซต A
 $m_1NO(U)$ แทนเซตของเซตเปิดเล็กสุดนาโนในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน
 $M_aNO(U)$ แทนเซตของเซตเปิดใหญ่สุดนาโนในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน
 $\tau_R(X)$ แทน ทอพอโลยีนาโน
 $(U, \tau_R(X))$ แทน ปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน
 $NO(U)$ แทนเซตของเซตเปิดนาโนในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน
 $NC(U)$ แทนเซตของเซตปิดนาโนในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน
 $N\eta(x)$ แทนเซตของย่านใกล้เคียงนาโนของ x
 $N\text{int}(A)$ แทนจุดภายในนาโนของเซต A
 $Ncl(A)$ แทนส่วนปิดคลุมนาโนของเซต A
 $m_1NC(U)$ แทนเซตของเซตปิดเล็กสุดนาโนในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน
 $M_aNC(U)$ แทนเซตของเซตปิดใหญ่สุดนาโนในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน

3.2 บทนิยามเซตเปิด(ปิด)เล็กสุดนาโน และเซตเปิด(ปิด)ใหญ่สุดนาโน

ผู้วิจัยได้กำหนดบทนิยามตามแนวคิดของ เกลติส ริวการ์ และคณะ ดังนี้

สำหรับปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน $(U, \tau_R(X))$ ซึ่ง A, H, G, E, F เป็นเซตย่อยแท้ที่ไม่ใช่เซตว่างของ U

(1) จะเรียก A ว่าเซตเปิดเล็กสุดนาโน (minimal nano open set) ถ้าเซตเปิดนาโนที่ถูกบรรจุใน A คือ ϕ หรือ A เท่านั้น เราเขียนแทนเซตของเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U ด้วย $m_1NO(U)$ นั่นคือ $A \in m_1NO(U)$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับสำหรับทุกๆ $H \in NO(U)$ ที่ $H \subseteq A$ จะได้ว่า $H = \phi$ หรือ $H = A$

(2) จะเรียก A ว่าเซตเปิดใหญ่สุดนาโน (maximal nano open set) ถ้าเซตเปิดนาโนที่บรรจุ A คือ U หรือ A เท่านั้น เซตของเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U เขียนแทนด้วย $M_aNO(U)$

นั่นคือ $A \in M_dO(U)$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับสำหรับทุกๆ $G \in NO(U)$ ที่ $A \subseteq G$ จะได้ว่า $G = U$ หรือ $G = A$

(3) จะกล่าวว่า F เป็นเซตปิดใหญ่สุดนาโน (nano maximal closed set) ก็ต่อเมื่อ เซตปิดนาโนใดๆ ที่บรรจุ F คือ U หรือ F นั่นคือ ถ้า E เป็นเซตปิดนาโนซึ่ง $F \subseteq E$ แล้ว $F = U$ หรือ $F = E$

(4) จะกล่าวว่า F เป็นเซตปิดเล็กสุดนาโน (nano minimal closed set) ก็ต่อเมื่อ เซตปิดนาโนใดๆ ที่ถูกบรรจุใน F คือ F หรือ ϕ นั่นคือ ถ้า E เป็นเซตปิดนาโนซึ่ง $E \subseteq F$ แล้ว $F = E$ หรือ $F = \phi$

3.3 ความสัมพันธ์ของเซตเปิดเล็กสุดนาโน และเซตเปิดใหญ่สุดนาโน

ในการศึกษาความสัมพันธ์ของเซตเปิดเล็กสุดนาโน และเซตเปิดใหญ่สุดนาโน ในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้พบว่า เมื่อกำหนดให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และ

3.3.1 สำหรับ $A \subset U$ ที่เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U จะได้ว่า

(1) ถ้า x เป็นสมาชิกใน A แล้ว $A \subset W$ สำหรับแต่ละ $W \in N\eta(x)$ และ

$W \in NO(U)$

(2) $A = \cap \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U)\}$ สำหรับแต่ละ $x \in A$

3.3.2 สำหรับ A ที่เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U

และ $x \in U - A$

(1) ถ้า W เป็นย่านใกล้เคียงนาโนของ x และ W เป็นเซตเปิดนาโนใน U แล้ว

$W \cap A = \phi$ หรือ $A \subset W$

(2) ถ้า $A_x = \cap \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U)\}$ แล้ว $A_x \cap A = \phi$ หรือ $A \subset A_x$

3.3.3 สำหรับ $A, W \subseteq U$ จะได้ว่า ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและ $x \in A$ แล้วสำหรับแต่ละย่านใกล้เคียงเปิดนาโน W ของ x จะได้ว่า $W \cup A = U$ หรือ $W \subset A$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

3.3.4 สำหรับ A, B และ C ซึ่งต่างก็เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U

(1) ถ้า $A \neq B$ และ $A \cap B \subset C$ แล้ว $A = C$ หรือ $B = C$

(2) ถ้าแต่ละเซตแตกต่างกันทั้งหมด (นั่นคือ $A \neq B \neq C \neq A$) แล้ว $A \cap B \subsetneq A \cap C$

(3) ถ้า $x \in B$ แล้ว $B = \cup \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U), W \cup B \neq U\}$

(4) ถ้า $x \in (U - A)$ แล้ว $U - A \subset W$ สำหรับทุกๆ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$

3.3.5 สำหรับ A ที่เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U

แล้วข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้จริง

(1) สำหรับแต่ละ $x \in U - A$ และสำหรับแต่ละ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$

จะได้ว่า $A=W$

(2) มี $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$ ที่ทำให้ $U-A \subset W$ และ $W \not\subset U$

และข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

(3) สำหรับแต่ละ $x \in U-A$ และสำหรับแต่ละ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$

จะได้ว่า $U-A \not\subset W$

(4) มี $W \in NO(U)$ ที่ทำให้ $U-A=W \neq U$

3.3.6 สำหรับ A ที่เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U แล้วจะได้ว่า

(1) $Ncl(A)=U$ หรือ $Ncl(A)=A$

(2) $Nint(U-A)=U-A$ หรือ $Nint(U-A)=\phi$

(3) ถ้า $\phi \neq B \subseteq (U-A)$ แล้ว $Ncl(B)=U-A$

(4) ถ้า $A \subset M \subseteq U$, $A \neq M$ แล้ว $Ncl(M)=U$

(5) ถ้า $U-A$ มีสมาชิกอย่างน้อยสองตัวแล้ว $Ncl(U-\{a\})=U$

สำหรับ $a \in (U-A)$

(6) ถ้า $A \subset B \subset U$ แล้ว $Nint(B)=A$

(7) ถ้า $\phi \neq B \subseteq (U-A)$ แล้ว $U-Ncl(B)=Nint(U-B)=A$

(8) ถ้า $B \subseteq U$ ที่ $A \subset B$ แล้ว B เป็นเซตพรีเปิดนาโน

(9) ถ้า $a \in (U-A)$ แล้ว $U-\{a\}$ เป็นเซตพรีเปิดนาโน

3.3.7 ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและ B เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U แล้ว $A \subset B$ หรือ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโนอย่างใดอย่างหนึ่ง

3.3.8 ถ้า U มีเซตย่อยที่เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดนาโนเซตเปิดเล็กสุดนาโนแล้วเซตดังกล่าวเป็นเซตเปิดนาโนไม่ซัด (nontrivial nano open set) หรือ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโนอย่างใดอย่างหนึ่ง

3.3.9 ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและเล็กสุดนาโนและ F เป็นเซตปิดนาโนใน U แล้ว $A=U-F$ หรือ $A=F$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

3.3.10 ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและเล็กสุดนาโนและ F เป็นเซตปิดนาโนใน U แล้ว A เป็นเซตย่อยแท้เปิดนาโนหรือเซตย่อยแท้เปิดนาโนมีเพียง A และ $U-A$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

3.3.11 ถ้า A และ B เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U ซึ่ง $A \neq B$ และ $A \cap B$ เป็นเซตปิดนาโน แล้ว $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน

3.3.12 ถ้ามีเซตย่อย A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U ซึ่ง A ไม่เป็นเซตหนาแน่นนาโน แล้ว $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน

3.3.13 สำหรับ A และ B ที่เป็นเซตเปิดนอโนใน U ซึ่ง $A \cap B \neq \emptyset$ และ $A \cap B \neq A$ ถ้า B เป็นเซตเปิดเล็กสุดนอโนแล้ว $A \cap B$ เป็นเซตเปิดเล็กสุดนอโนในปริภูมิย่อย $(A, \tau_R^A(X))$

3.4 ความสัมพันธ์ของเซตปิดใหญ่สุดนอโน และเซตปิดเล็กสุดนอโน

สำหรับปริภูมิทอพอโลยีนาโน $(U, \tau_R(X))$

3.4.1 เมื่อ $E, F \subseteq U$ ซึ่งต่างก็เป็นเซตปิดนอโน จะได้ว่า

(1) ถ้า F เป็นเซตปิดใหญ่สุดนอโนและ E เป็นเซตปิดนอโนแล้ว $F \cup E = U$ หรือ $E \subset F$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

(2) ถ้า F เป็นเซตปิดเล็กสุดนอโนและ E เป็นเซตปิดนอโนแล้ว $F \cap E = \emptyset$ หรือ $F \subset E$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

3.4.2 ถ้า F เป็นเซตปิดใหญ่สุดนอโนใน U และ E เป็นเซตปิดเล็กสุดนอโน แล้ว $E \subset F$ หรือ $F \cup E = U, F \cap E = \emptyset$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

3.4.3 ถ้า F ซึ่งเป็นทั้งเซตปิดใหญ่สุดนอโนและเล็กสุดนอโนใน U จะได้ว่า

(1) F เป็นเซตย่อยแท้ที่เป็นเซตปิดนอโนเพียงเซตเดียว

(2) ถ้า E เป็นเซตย่อยแท้และเป็นเซตปิดนอโนใน U แล้ว $F \cup E = U$ และ $F \cap E = \emptyset$

3.4.4 ถ้า F เป็นทั้งเซตปิดใหญ่สุดนอโนและเล็กสุดนอโนใน U และ G เป็นเซตเปิดนอโน แล้ว $F = U - G$ หรือ $F = G$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

3.4.5 ถ้า F เป็นทั้งเซตปิดใหญ่สุดและเล็กสุดนอโนใน U แล้วข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้จริง

(1) F เป็นเซตย่อยแท้ที่เป็นเซตปิดนอโนเพียงเซตเดียว หรือ

(2) เซตย่อยแท้ที่เป็นเซตปิดนอโนใน U คือ F และ $U - F$ เท่านั้น

3.5 ความสัมพันธ์ของเซตเปิด(ปิด)ใหญ่สุดนอโน และเซตเปิด(ปิด)เล็กสุดนอโน

สำหรับปริภูมิทอพอโลยีนาโน $(U, \tau_R(X))$

3.5.1 ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดนอโนและเซตปิดเล็กสุดนอโนใน U แล้ว เซตย่อยแท้ที่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดนอโนใน U คือ A และ $U - A$ เท่านั้น

3.5.2 ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดและเซตปิดเล็กสุดนอโนใน U และ F เป็นเซตทั้งเซตเปิดและเซตปิดนอโนแล้ว $F \subset A$ หรือ $A \cup F = U$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

3.5.3 ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดเล็กสุดนอโนและเซตปิดใหญ่สุดนอโน B เป็นเซตเปิดนอโนและ F เป็นเซตปิดนอโนใน U แล้วข้อต่อไปนี้จริง

$$(1) \mathbf{F} \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{B}$$

$$(2) \mathbf{A} \subset \mathbf{B} \text{ และ } \mathbf{A} \cup \mathbf{F} = \mathbf{U}$$

$$(3) \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \phi \text{ และ } \mathbf{F} \subset \mathbf{A}$$

$$(4) \mathbf{A} \cup \mathbf{F} = \mathbf{U} \text{ และ } \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \phi$$

3.5.4 ถ้า $\mathbf{A}$ เป็นทั้งเซตเปิดเล็กสุดและเซตปิดใหญ่สุดนาโนใน $\mathbf{U}$ แล้วเซตย่อยแท้ที่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดนาโนคือ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{U} - \mathbf{A}$ เท่านั้น

3.6 ตัวอย่างประกอบบทนิยาม การพิสูจน์ทฤษฎีบท และสรุปผลการวิจัย

ผู้วิจัยได้ดำเนินการสร้างตัวอย่างประกอบทุกๆบทนิยาม และแสดงรายละเอียดการพิสูจน์ทฤษฎีบทไว้ในบทที่ 4 สำหรับผลที่ได้จากการวิจัยนั้นเมื่อดำเนินการตามขั้นตอนที่กล่าวมาทำให้ได้ผลการวิจัยครบถ้วนตามวัตถุประสงค์ทั้งสองข้อ คือ การสร้างบทนิยามของเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตเปิดใหญ่สุดนาโนในปริภูมิทอพอโลยีนาโน และข้อที่สองได้ดำเนินการ คิดค้นทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ เกี่ยวกับสมบัติเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตเปิดใหญ่สุดนาโน ซึ่งเป็นการขยายแนวคิดจากงานของ เลลิส ทราวาการ์ และคาร์เมล ริชาร์ด

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ผู้วิจัยได้กล่าวถึงวิธีการดำเนินการวิจัยในบทที่ 3 ที่ผ่านมาในงานวิจัยเรื่อง สมบัติบางประการของเซตเปิดเล็กสุดนาโนและใหญ่สุดนาโน ทำให้เกิดผลลัพธ์เป็นเนื้อหาในบทที่ 4 ซึ่งประกอบด้วย สมบัติของเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตเปิดใหญ่สุดนาโน สมบัติของเซตปิดใหญ่สุดนาโน และเซตปิดเล็กสุดนาโน เซตเปิดใหญ่สุดนาโน เซตเปิดเล็กสุดนาโน เซตปิดใหญ่สุดนาโน และเซตปิดเล็กสุดนาโน มีตัวอย่างประกอบบทนิยาม พร้อมทั้งการพิสูจน์ทฤษฎีบท ดังที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้

4.1 สมบัติของเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตเปิดใหญ่สุดนาโน

ในหัวข้อนี้จะแนะนำบทนิยามและตัวอย่างของเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตเปิดใหญ่สุดนาโน และสมบัติของเซตดังกล่าว

บทนิยาม 4.1.1 ให้ $(U, \tau_r(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ซึ่ง A, H, G เป็นเซตย่อยแท้ที่ไม่เป็นเซตว่างของ U

(1) จะเรียก A ว่าเซตเปิดเล็กสุดนาโน (minimal nano open set) ถ้าเซตเปิดนาโนที่ถูกบรรจุใน A คือ ϕ หรือ A เท่านั้น เราเขียนแทนเซตของเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U ด้วย $m_1NO(U)$ นั่นคือ $A \in m_1NO(U)$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับสำหรับทุกๆ $H \in NO(U)$ ที่ $H \subseteq A$ จะได้ว่า $H = \phi$ หรือ $H = A$

(2) จะเรียก A ว่าเซตเปิดใหญ่สุดนาโน (maximal nano open set) ถ้าเซตเปิดนาโนที่ถูกบรรจุใน A คือ U หรือ A เท่านั้น เซตของเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U เขียนแทนด้วย $M_1NO(U)$ นั่นคือ $A \in M_1NO(U)$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับสำหรับทุกๆ $G \in NO(U)$ ที่ $A \subseteq G$ จะได้ว่า $G = U$ หรือ $G = A$

ตัวอย่างที่ 4.1.1 กำหนดให้ $U = \{p, q, r, s\}$ ซึ่ง $U/R = \{\{p\}, \{q\}, \{r, s\}\}$ และ $X = \{p, r\} \subseteq U$ จะได้ว่าทอพอโลยีนาโน $\tau_R(X) = \{\emptyset, \{p\}, \{r, s\}, \{p, r, s\}, U\}$ จงหา เซตเปิดเล็กสุดนาโน เซตเปิดใหญ่สุดนาโน

วิธีทำ เนื่องจากเซตเปิดนาโนในปริภูมิทอพอโลยีนาโนที่กำหนดให้ได้แก่ $\emptyset, \{p\}, \{r, s\}, \{p, r, s\}$ และ U พิจารณาการเป็นเซตย่อยของเซตเปิดนาโนดังกล่าวได้ดังตารางข้างล่าง

ตารางที่ 4.1.1 แสดงเซต A เป็นเซตย่อยของ B เมื่อ A, B เป็นเซตเปิดนาโน

$B \backslash A$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{r, s\}$	$\{p, r, s\}$	U
$\emptyset$	✓	✓	✓	✓	✓
$\{p\}$	✗	✓	✓	✓	✓
$\{r, s\}$	✗	✗	✓	✓	✓
$\{p, r, s\}$	✗	✗	✗	✓	✓
U	✗	✗	✗	✗	✓

พิจารณา $\{p\}$ เพราะว่าเซตเปิดนาโนที่เป็นเซตย่อยของ $\{p\}$ มีเพียง $\{p\}$ และ $\emptyset$ เท่านั้น

ทำให้ $\{p\} \in m_i NO(U)$

พิจารณา $\{r, s\}$ เพราะว่าเซตเปิดนาโนที่เป็นเซตย่อยของ $\{r, s\}$ มีเพียง $\{r, s\}$ และ $\emptyset$ เท่านั้น

ทำให้ $\{r, s\} \in m_i NO(U)$

พิจารณา $\{p, r, s\}$ เพราะว่าเซตเปิดนาโนที่เป็นเซตย่อยของ $\{p, r, s\}$ ได้แก่ $\{p\}, \{r, s\}, \{p, r, s\}$ และ $\emptyset$ โดยที่ $\{p\} \subseteq \{p, r, s\}$ ทำให้ $\{p, r, s\} \notin m_i NO(U)$

ดังนั้นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U ได้แก่ $\{p\}, \{r, s\}$

พิจารณา $\{p\}$ เพราะว่าเซตเปิดนาโนที่ $\{p\}$ เป็นเซตย่อยได้แก่ $\{p\}, \{p, r, s\}$ และ U

ทำให้ $\{p\} \notin M_a NO(U)$

พิจารณา $\{r, s\}$ เพราะว่าเซตเปิดนาโนที่ $\{r, s\}$ เป็นเซตย่อย มี $\{r, s\}, \{p, r, s\}$ และ U

ทำให้ $\{p, r\} \notin M_a NO(U)$

พิจารณา $\{p, r, s\}$ เพราะว่าเซตเปิดนาโนที่ $\{p, r, s\}$ เป็นเซตย่อยมีเพียง $\{p, r, s\}$ และ U

ทำให้ $\{p, r, s\} \notin M_a NO(U)$ ดังนั้นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U คือ $\{p, r, s\}$

ต่อไปนี้จะศึกษาถึงบางสมบัติเพิ่มเติมของเซตเปิดเล็กสุดนาโนและใหญ่สุดนาโน ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.1.1 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และ A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนนาโนใน U จะได้ว่า

(1) ถ้า x เป็นสมาชิกใน A แล้ว $A \subset W$ สำหรับแต่ละ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$

(2) $A = \cap \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U)\}$ สำหรับแต่ละ $x \in A$

การพิสูจน์ (1) ให้ $x \in A$ และ $W \in N\eta(x)$ ที่ $W \in NO(U)$ ทำให้ $W \cap A \neq \emptyset$

โดยทฤษฎีบท 2.2.1 ข้อ(1) จึงได้ว่า $A \subset W$

(2) ให้ $x \in A$ และ $W \in N\eta(x)$ เนื่องจาก A เป็นเซตเปิดนาโนใน U ที่บรรจุ x ทำให้

$A \in N\eta(x)$ เป็นผลทำให้ $\cap \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U)\} \subset A$

โดยข้อ (1) ได้ว่า $A \subset \cap \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U)\}$

ดังนั้น $A = \cap \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U)\}$ □

ทฤษฎีบท 4.1.2 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U และ $x \in U - A$ ถ้า W เป็นย่านใกล้เคียงนาโนของ x และ W เป็นเซตเปิดนาโนใน U แล้ว $W \cap A = \emptyset$ หรือ $A \subset W$

การพิสูจน์ เนื่องจาก W เป็นเซตเปิดนาโนและ A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโน

โดยทฤษฎีบท 2.2.1 ข้อ(1) ทำให้ได้ว่า $W \cap A = \emptyset$ หรือ $A \subset W$ □

บทแทรก 4.1.1 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U

และ $x \in U - A$ ถ้า $A_x = \cap \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U)\}$ แล้ว $A_x \cap A = \emptyset$ หรือ $A \subset A_x$

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโน และ $x \in U - A$ และให้ W เป็นย่านใกล้เคียงเปิดนาโนของ x โดยทฤษฎีบท 4.1.2 ทำให้ได้ว่า $W \cap A = \emptyset$ หรือ $A \subset W$ ถ้า $A \subset W$ สำหรับทุกๆ W ที่เป็นย่านใกล้เคียงเปิดนาโนของ x แล้ว ทำให้ได้ว่า

$A \subset A_x = \cap \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U)\}$

ถ้า $W \cap A = \emptyset$ สำหรับทุกๆ W ที่เป็นย่านใกล้เคียงเปิดนาโนของ x แล้วทำให้มี W^* ที่เป็นย่านใกล้เคียงเปิดนาโนของ x ที่ $W^* \cap A = \emptyset$ ดังนั้น $U_x \cap A = \emptyset$ □

ทฤษฎีบท 4.1.4 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และ A, B และ C เซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U ซึ่ง $A \neq B$ ถ้า $A \cap B \subset C$ แล้ว $A = C$ หรือ $B = C$

การพิสูจน์ อาศัยทฤษฎีบท 2.2.5 □

ทฤษฎีบท 4.1.5 ให้ $(U, \tau_r(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และ A, B และ C เซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U ถ้าแต่ละเซตแตกต่างกันทั้งหมด (นั่นคือ $A \neq B \neq C \neq A$) แล้ว $A \cap B \not\subset A \cap C$

การพิสูจน์ สมมติว่า $A \cap B \subset A \cap C$ ดังนั้น $(A \cap B) \cup (B \cap C) \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$

เป็นผลทำให้ $B \cap (A \cup C) \subset (A \cup B) \cap C$ เนื่องจาก A, B และ C เซตเปิดใหญ่สุดนาโน และ $A \neq B \neq C \neq A$ โดยทฤษฎีบท 2.2.5 ข้อ(2) จึงได้ว่า $A \cup C = U = A \cup B$

ทำให้ได้ว่า $B = B \cap U = B \cap (A \cup C) \subset (A \cup B) \cap C = U \cap C = C$

แต่ B เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโน จึงได้ว่า $B = C$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐาน $B \neq C$

ดังนั้น $A \cap B \not\subset A \cap C$ □

ทฤษฎีบท 4.1.6 ให้ $(U, \tau_r(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า B เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ x เป็นสมาชิกใน B แล้ว $B = \cup\{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U), W \cup B \neq U\}$

การพิสูจน์ เนื่องจาก B เป็นเซตเปิดนาโนและเป็นย่านใกล้เคียงนาโนของ x

จึงได้ว่า $B \subset \cup\{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U), W \cup B \neq U\}$

โดยทฤษฎีบท 4.1.3 ทำให้ได้ว่า $\cup\{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U), W \cup B \neq U\} \subset B$

ดังนั้น $B = \cup\{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U), W \cup B \neq U\}$ □

ทฤษฎีบท 4.1.7 ให้ $(U, \tau_r(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ x เป็นสมาชิกใน $U - A$ แล้ว $U - A \subset W$ สำหรับทุกๆ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$

การพิสูจน์ ให้ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$ เนื่องจาก $x \in U - A$ ทำให้ $W \not\subset A$ โดยทฤษฎีบท 2.2.5 ทำให้ได้ว่า $W \cup A = U$ เป็นผลทำให้ $W^c \cap A^c = (W \cup A)^c = U^c = \emptyset$

ดังนั้น $U - A \subset W$ □

บทแทรก 4.1.2 ให้ $(U, \tau_r(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U ข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้จริง

(1) สำหรับแต่ละ $x \in U - A$ และสำหรับแต่ละ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$ จะได้ว่า

$$A = W$$

(2) มี $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$ ที่ทำให้ $U - A \subset W$ และ $W \not\subset U$

การพิสูจน์ สมมติว่า (1) ไม่จริง นั่นคือ มี $x \in U - A$ และมี $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$ ซึ่ง $A \not\subset W$ โดยทฤษฎีบท 4.1.7 ทำให้ได้ว่า $U - A \subset W$ □

บทแทรก 4.1.3 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U ข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้จริง

(1) สำหรับแต่ละ $x \in U - A$ และสำหรับแต่ละ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$ จะได้ว่า $U - A \not\subset W$

(2) มี $W \in NO(U)$ ที่ทำให้ $U - A = W \neq U$

การพิสูจน์ สมมติว่า (2) ไม่จริง นั่นคือ สำหรับทุกๆ $W \in NO(U)$ ซึ่งได้ว่า $U - A \neq W$ หรือ $W \subset U$ โดยทฤษฎีบท 4.1.7 ทำให้ได้ว่า $U - A \subset W$ สำหรับแต่ละ $x \in U - A$ และสำหรับแต่ละ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$ จะได้ว่า $U - A \subset W$ □

ทฤษฎีบท 4.1.8 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U แล้ว $Ncl(A) = U$ หรือ $Ncl(A) = A$

การพิสูจน์ เป็นจริงตามบทแทรก 4.1.3 □

ทฤษฎีบท 4.1.9 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U แล้ว $Nint(U - A) = U - A$ หรือ $Nint(U - A) = \emptyset$

การพิสูจน์ เป็นจริงตามบทแทรก 4.1.3 □

ทฤษฎีบท 4.1.10 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ B เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ $U - A$ แล้ว $Ncl(B) = U - A$

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และเนื่องจาก $\emptyset \neq B \subset U - A$

ทำให้ได้ว่า $Ncl(B) \subset Ncl(U - A) = U - A$ ต่อไปจะแสดงว่า $U - A \subset Ncl(B)$

ให้ $x \in (U - A)$ เนื่องจาก A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U

โดยทฤษฎีบท 4.1.7 จะได้ว่าสำหรับแต่ละ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$

ทำให้ $U - A \subset W$ เป็นผลทำให้ $\emptyset \neq B = B \cap B \subset (U - A) \cap B \subset W \cap B$

จึงได้ว่า $W \cap B \neq \emptyset$ ดังนั้น $x \in Ncl(B)$ เป็นผลทำให้ $U - A \subset Ncl(B)$

ดังนั้น $Ncl(B) = U - A$ □

บทแทรก 4.1.4 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ M เป็นเซตย่อยของ U ซึ่ง $A \subset M$, $A \neq M$ แล้ว $Ncl(M) = U$

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และเนื่องจาก $A \subset M \subset U$

ทำให้ได้ว่า $Ncl(M) \subset Ncl(U) = U$ ต่อไปจะแสดงว่า $U \subset Ncl(M)$

เพราะว่า $A \subset M \subset U$ และ $A \neq M$ ดังนั้นมี $B \subset U - A$, $B \neq \emptyset$ ซึ่ง $M = A \cup B$

โดยทฤษฎีบท 4.1.10 จะได้ว่า $U - A \subset Ncl(B)$

พิจารณา $U = A \cup (U - A) \subset Ncl(A) \cup Ncl(B) = Ncl(A \cup B) = Ncl(M)$

ดังนั้น $Ncl(M) = U$ □

ทฤษฎีบท 4.1.11 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ $U - A$ มีสมาชิกอย่างน้อยสองตัวแล้ว $Ncl(U - \{a\}) = U$ สำหรับ $a \in (U - A)$

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และเนื่องจาก $\{a\} \subset U - A$ ทำให้ได้ว่า $A \subset U - \{a\}$ และ $A \neq U - \{a\}$ โดยบทแทรก 4.1.4 จึงได้ว่า $Ncl(U - \{a\}) = U$ □

ทฤษฎีบท 4.1.12 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ B เป็นเซตย่อยแท้ของ U ที่ $A \subset B$ แล้ว $Nint(B) = A$

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U กรณีที่ $B = A$ ทำให้ได้ว่า $Nint(B) = Nint(A) = A$

กรณีที่ $B \neq A$ เพราะว่า $A \subset B$ ทำให้ได้ว่า $A = Nint(A) \subset Nint(B)$

แต่เนื่องจาก A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและ $Nint(B)$ เป็นเซตเปิดนาโน ทำให้ $Nint(B) \subset A$

ดังนั้น $Nint(B) = A$ □

ทฤษฎีบท 4.1.13 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ B เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ $U - A$ แล้ว $U - Ncl(B) = Nint(U - B) = A$

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U โดยทฤษฎีบท 4.1.10 ได้ว่า $Ncl(B) = U - A$ เป็นผลทำให้ $U - Ncl(B) = A$ เนื่องจาก $A \subset U - B \subset U$ โดยทฤษฎีบท 4.1.12 ได้ว่า

$Nint(U - B) = A$ ดังนั้น $U - Ncl(B) = Nint(U - B) = A$ □

ทฤษฎีบท 4.1.14 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดสุดใหญ่นาโนใน U และ B เป็นเซตย่อยของ U ที่ $A \subset B$ แล้ว B เป็นเซตพรีเปิดนาโน

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเปิดสุดใหญ่นาโนใน U และ B เป็นเซตย่อยของ U

พิจารณาเป็นสองกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $B = A$ ทำให้ B เป็นเซตเปิดนาโน เป็นผลทำให้ $B = Nint(B) \subset Nint(Ncl(B))$

ดังนั้น B เป็นเซตพรีเปิดนาโน

กรณี ที่ 2 ถ้า $B \neq A$, $A \subset B$ โดยบทแทรก 4.1.4 ได้ว่า $Ncl(B) = U$ เป็นผลทำให้

$$Nint(Ncl(B)) = Nint(U) = U \supset B$$

ดังนั้น B เป็นเซตพรีเปิดนาโน □

บทแทรก 4.1.5 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ $a \in (U - A)$ แล้ว $U - \{a\}$ เป็นเซตพรีเปิดนาโน

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ $a \in (U - A)$ ได้ว่า $\{a\} \subset (U - A)$ เป็นผลทำให้ได้ว่า $A \subset (U - \{a\})$ โดยทฤษฎีบท 4.1.14

ทำให้ได้ว่า $U - \{a\}$ เป็นเซตพรีเปิดนาโน □

ทฤษฎีบท 4.1.15 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และ A, B เป็นเซตย่อยของ U

ถ้า $A \cup B = U$, $A \cap B$ เป็นเซตปิดนาโนและ A เป็นเซตเปิดนาโน

แล้ว B เป็นเซตปิดนาโน

การพิสูจน์ เนื่องจาก $A \cup B = U$ จึงได้ว่า $(U - A) \cap (U - B) = \emptyset$ เป็นผลทำให้ $(U - A) \subset B$

$$\text{พิจารณา } (A \cap B) \cup (U - A) = (A \cup (U - A)) \cap (B \cup (U - A)) = B \cup (U - A) = B$$

เนื่องจาก $A \cap B$ และ $U - A$ เป็นเซตปิดนาโนใน U

ดังนั้น B เป็นเซตปิดนาโน □

ต่อไปนี้เป็น การแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซตเปิดใหญ่สุดนาโน และเซตเปิดเล็กสุดนาโนในปริภูมิไม่เชื่อมโยง

บทนิยาม 4.1.2 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน จะกล่าวว่า $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน (nano disconnected space) ก็ต่อเมื่อ มีเซตเปิดนาโน G, H ซึ่งต่างก็ไม่ใช่เซตว่าง ที่ $G \cap H = \emptyset$ และ $G \cup H = U$ และเราจะกล่าวว่า $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชื่อมโยงนาโน (nano connected space) ก็ต่อเมื่อ $(U, \tau_R(X))$ ไม่เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน นั่นคือไม่มีเซตเปิดนาโน G, H ซึ่งต่างก็ไม่ใช่เซตว่างที่ $G \cap H = \emptyset$ และ $G \cup H = U$

ตัวอย่างที่ 4.1.2 ให้ $U = \{a, b, c, d\}$ ซึ่ง $U_R = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$ และ $X = \{a, d\} \subseteq U$

จะได้ว่าทอพอโลยีนาโน $\tau_R(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, U\}$ และเซตย่อยแท้ที่ไม่ใช่เซตว่างซึ่งเป็นเซตเปิดนาโนใน U ได้แก่ $\{a\}, \{b, c, d\}$ โดยที่ $\{a\} \cup \{b, c, d\} = U$ และ $\{a\} \cap \{b, c, d\} = \emptyset$

ดังนั้น $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน

ทฤษฎีบท 4.1.16 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโน และ B เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U แล้ว $A \subset B$ หรือ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโนอย่างใดอย่างหนึ่ง

การพิสูจน์ เนื่องจาก A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ B เป็นเซตเปิดนาโน โดยทฤษฎีบท 2.2.1 (1) ได้ว่า $A \cup B = U$ หรือ $B \subset A$ เนื่องจาก A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U และ B เป็นเซตเปิดนาโน โดยทฤษฎีบท 2.2.1 ได้ว่า $A \cap B = \emptyset$ หรือ $B \subset A$ พิจารณากรณีที่ $A \cup B = U$, $B \subset A$ ทำให้ได้ว่า $A \subset A \cup B = U$ และ $U = A \cup B \subset A \cup A = A$ เป็นผลทำให้ $A = U$ กรณีที่ $A \cap B = \emptyset$, $B \subset A$ จึงได้ว่า $B = A \cap B \subset A \cap A = A$ และ $\emptyset = A \cap B$ เป็นผลทำให้ $B = \emptyset$ ดังนั้น $A \cup B = U$, $A \cap B = \emptyset$ และ $B \subset A$ นั่นคือถ้า $A \cup B = U$ และ $A \cap B = \emptyset$ สรุปได้ว่า $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน $\square$

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 4.1.16 พบว่า $A \cup B = U$ และ $A \cap B = \emptyset$ แล้วทำให้ $A = U - B$ ดังนั้นในทฤษฎีบทนี้ ถ้า $B \not\subset A$ แล้ว A และ B ทั้งคู่ต่างก็เป็นเซตปิดนาโน ซึ่งเป็นผลให้ทฤษฎีบทดังกล่าวสมมูลกับข้อความ “ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและ B เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U แล้ว $A \subset B$ หรือ $A = U - B$ อย่างใดอย่างหนึ่ง”

ทฤษฎีบท 4.1.17 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า U มีเซตย่อยที่เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดนาโนเซตเปิดเล็กสุดนาโนแล้วเซตดังกล่าวเป็นเซตเปิดนาโนไม่ซัด (nontrivial nano open set) หรือ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโนอย่างใดอย่างหนึ่ง

การพิสูจน์ ให้ A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและเซตเปิดเล็กสุดนาโน ใน U และให้ B เป็นเซตเปิดนาโนใน U ทำให้ได้ว่า $A \subset A \cup B$ เพราะว่า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโน จึงพิจารณาได้ 2 กรณีต่อไปนี้กรณีที่ 1 $A = A \cup B$ ทำให้ $B \subset A$ แต่เนื่องจาก A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโน

เป็นผลทำให้ $B = \emptyset$ หรือ $B = A$

กรณีที่ 2 $A \cup B = U$ แต่เนื่องจาก A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโน โดยทฤษฎีบท 2.2.1 (1) ได้ว่า $A \cap B = \emptyset$ หรือ $A \subset B$ แต่ A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและ $A \subset B$ จึงได้ว่า $A = B$ หรือ $B = U$ จากทั้งสองกรณีทำให้ได้ว่า $A = B$ หรือ $A \cup B = U$ และ $A \cap B = \emptyset$

จึงสรุปว่า ถ้า $A \cup B = U$ และ $A \cap B = \emptyset$ แล้ว $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน $\square$

บทแทรก 4.1.6 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและเล็กสุดนาโนและ F เป็นเซตปิดนาโนใน U แล้ว $A=U-F$ หรือ $A=F$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

การพิสูจน์ เนื่องจาก A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและเล็กสุดนาโน และ F เป็นเซตปิดนาโน ทำให้ได้ว่า $U-F$ เป็นเซตเปิดนาโน ด้วยกระบวนการพิสูจน์เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 4.1.17 ได้ว่า $A=U-F$ หรือ $A \cup (U-F) = U$ และ $A \cap (U-F) = \phi$

ได้ว่า $A \cup (U-F) = U$ และ $A \cap (U-F) = \phi$ เป็นผลทำให้ $A=F$ □

บทแทรก 4.1.7 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและเล็กสุดนาโนและ F เป็นเซตปิดนาโนใน U แล้ว A เป็นเซตย่อยแท้เปิดนาโนหรือเซตย่อยแท้เปิดนาโนมีเพียง A และ $U-A$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

การพิสูจน์ ให้ B เป็นเซตย่อยแท้เปิดนาโน เช่นเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.1.17 ได้ว่า

$A=B$ หรือ $A \cup B = U$ และ $A \cap B = \phi$ ได้ว่า $A \cup B = U$ และ $A \cap B = \phi$

เป็นผลทำให้ $B=U-A$ □

ทฤษฎีบท 4.1.18 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A และ B เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U ซึ่ง $A \neq B$ และ $A \cap B$ เป็นเซตปิดนาโน แล้ว $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน

การพิสูจน์ ให้ A และ B เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโน ทำให้ได้ว่า $A \cup B = U$

จากสมมติฐาน $A \cap B$ เป็นเซตปิดนาโนถ้า $A \cap B = \phi$ ดังนั้น $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโนถ้า $A \cap B \neq \phi$ เนื่องจาก $A - (A \cap B)$ และ $B - (A \cap B)$ เป็นเซตเปิดนาโนทั้งคู่

เราเลือก $G = A - (A \cap B)$ และ $H = B$ หรือเลือก $H = B - (A \cap B)$ และ $G = A$

จะได้ว่า $G \cup H = U$ และ $G \cap H = \phi$

นั่นคือ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน □

ทฤษฎีบท 4.1.19 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้ามีเซตย่อย A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U ซึ่ง A ไม่เป็นเซตหนาแน่นนาโน แล้ว $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโน เนื่องจากไม่เป็นเซตหนาแน่นนาโนใน U จึงทำให้ $Ncl(A) \neq U$ โดยทฤษฎีบท 4.1.11 ทำให้ได้ว่า $A = Ncl(A)$

เราเลือก $G = A$ และ $H = U - Ncl(A)$ ซึ่งต่างก็เป็นเซตเปิดนาโนใน U

ที่ทำให้ $G \cup H = U$ และ $G \cap H = \phi$

ดังนั้น $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน □

4.2 สมบัติของเซตปิดเล็กสุดนาโนและเซตปิดใหญ่สุดนาโน

ในหัวข้อนี้จะแนะนำบทนิยามและตัวอย่างของเซตปิดเล็กสุดนาโนและเซตปิดใหญ่สุดนาโนและสมบัติของเซตดังกล่าว

บทนิยาม 4.2.1 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ซึ่ง E, F เป็นเซตย่อยแท้ที่ไม่เป็นเซตว่างของ U

(1) จะกล่าวว่า F เป็นเซตปิดใหญ่สุดนาโน (nano maximal closed set) ก็ต่อเมื่อ เซตปิดนาโนใดๆ ที่บรรจุ F คือ U หรือ F นั่นคือ ถ้า E เป็นเซตปิดนาโนซึ่ง $F \subseteq E$ แล้ว $F = U$ หรือ $F = E$

(2) จะกล่าวว่า F เป็นเซตปิดเล็กสุดนาโน (nano minimal closed set) ก็ต่อเมื่อ เซตปิดนาโนใดๆ ที่ถูกบรรจุใน F คือ F หรือ $\emptyset$ นั่นคือ ถ้า E เป็นเซตปิดนาโนซึ่ง $F \subseteq E$ แล้ว $F = E$ หรือ $F = \emptyset$

ต่อไปนี้เป็น การแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซตปิดใหญ่สุดนาโน และเซตปิดเล็กสุดนาโนในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 4.1.1 ทำให้ได้หลักภาวะคู่กัน (duality principle) กับบทนิยาม 4.2.1 สำหรับเซตย่อย F ในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน $(U, \tau_R(X))$ ได้เป็นข้อความดังนี้

- (1) F เป็นเซตปิดเล็กสุดนาโน ก็ต่อเมื่อ $U - F$ เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโน
- (2) F เป็นเซตปิดใหญ่สุดนาโน ก็ต่อเมื่อ $U - F$ เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโน

ตัวอย่างที่ 4.1.3 จากตัวอย่างที่ 4.1.1 จงหา เซตปิดเล็กสุดนาโน และเซตปิดใหญ่สุดนาโน

วิธีทำ เนื่องจากคอมพลีเมนต์ของเซตเปิดนาโนเป็นเซตปิดนาโน ทำให้ $\emptyset, \{q, r, s\}, \{p, q\}, \{q\}$ และ U เป็นเซตปิดนาโน พิจารณาการเป็นเซตย่อยของเซตปิดนาโนดังกล่าวได้ดังตารางข้างล่าง

ตารางที่ 4.1.2 แสดงเซต E เป็นเซตย่อยของเซต F เมื่อ E, F เป็นเซตปิดนาโน

$\subseteq$		F				
		$\emptyset$	$\{q\}$	$\{p, q\}$	$\{q, r, s\}$	U
E	$\emptyset$	✓	✓	✓	✓	✓
	$\{q\}$	×	✓	✓	✓	✓
	$\{p, q\}$	×	×	✓	✓	✓
	$\{q, r, s\}$	×	×	×	✓	✓
	U	×	×	×	×	✓

ดำเนินการในทำนองเดียวกันกับตัวอย่างที่ 4.1.1 จะได้ว่า เซตปิดเล็กสุดนาโนใน U คือ $\{q\}$ และเซตปิดใหญ่สุดนาโนใน U คือ $\{p, q\}$ และ $\{q, r, s\}$

บทตั้ง 4.2.1 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโนและ $E, F \subseteq U$ ซึ่งต่างก็เป็นเซตปิดนาโนจะได้ว่า

(1) ถ้า F เป็นเซตปิดใหญ่สุดนาโนและ E เป็นเซตปิดนาโนแล้ว $F \cup E = U$ หรือ $E \subset F$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

(2) ถ้า F เป็นเซตปิดเล็กสุดนาโนและ E เป็นเซตปิดนาโนแล้ว $F \cap E = \emptyset$ หรือ $F \subset E$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

การพิสูจน์ โดยหลักภาวะคู่กันและการพิสูจน์ทำนองเช่นเดียวกับทฤษฎีบท 2.2.1 (1)

และ 2.2.5 (1)

□

ทฤษฎีบท 4.2.1 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า F เป็นเซตปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ E เป็นเซตปิดเล็กสุดนาโน แล้ว $E \subset F$ หรือ $F \cup E = U$, $F \cap E = \emptyset$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

การพิสูจน์ โดยการพิสูจน์ทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 4.1.16

□

ทฤษฎีบท 4.2.2 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และมีสับเซต F ซึ่งเป็นทั้งเซตปิดใหญ่สุดนาโนและเล็กสุดนาโนใน U จะได้ว่า

(1) F เป็นเซตย่อยแท้ที่เป็นเซตปิดนาโนเพียงเซตเดียว

(2) ถ้า E เป็นเซตย่อยแท้และเป็นเซตปิดนาโนใน U แล้ว $F \cup E = U$ และ $F \cap E = \emptyset$

การพิสูจน์ โดยการพิสูจน์ทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 4.1.17

□

บทแทรก 4.2.1 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า F เป็นทั้งเซตปิดใหญ่สุดนาโนและเล็กสุดนาโนใน U และ G เป็นเซตเปิดนาโน แล้ว $F = U - G$ หรือ $F = G$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

การพิสูจน์ โดยการพิสูจน์ทำนองเดียวกันกับบทแทรก 4.1.6

□

บทแทรก 4.2.2 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า F เป็นทั้งเซตปิดใหญ่สุดและเล็กสุดนาโนใน U แล้วข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

(1) F เป็นเซตย่อยแท้ที่เป็นเซตปิดนาโนเพียงเซตเดียว หรือ

(2) เซตย่อยแท้ที่เป็นเซตปิดนาโนใน U คือ F และ $U - F$ เท่านั้น

การพิสูจน์ โดยการพิสูจน์ทำนองเดียวกันกับบทแทรก 4.1.7 □

บทแทรก 4.2.3 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดนาโน และเซตปิดเล็กสุดนาโนใน U แล้ว เซตย่อยแท้ที่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดนาโนใน U คือ A และ $U - A$ เท่านั้น

การพิสูจน์ ให้ F เซตย่อยแท้ที่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดนาโนใน U

โดยทฤษฎีบท 2.6 เมื่อเลือก $B = F$ จะได้ว่า $A = F$ หรือ $A = U - F$ □

ทฤษฎีบท 4.2.3 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดและเซตปิดเล็กสุดนาโนใน U และ F เป็นเซตทั้งเซตเปิดและเซตปิดนาโนแล้ว $F \subset A$ หรือ $A \cup F = U$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

การพิสูจน์ พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 2.2.6 □

ทฤษฎีบท 4.2.4 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดเล็กสุดนาโน และเซตปิดใหญ่สุดนาโน B เป็นเซตเปิดนาโนและ F เป็นเซตปิดนาโนใน U แล้วข้อต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) $F \subset A \subset B$
- (2) $A \subset B$ และ $A \cup F = U$
- (3) $A \cap B = \phi$ และ $F \subset A$
- (4) $A \cup F = U$ และ $A \cap B = \phi$

การพิสูจน์ พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 2.2.6 □

บทแทรก 4.2.4 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดเล็กสุดและเซตปิดใหญ่สุดนาโนใน U แล้วเซตย่อยแท้ที่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดนาโนคือ A และ $U - A$ เท่านั้น

การพิสูจน์ พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับบทแทรก 4.2.3 □

ทฤษฎีบท 4.2.5 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน A และ B เป็นเซตเปิดนาโนใน U ซึ่ง $A \cap B \neq \phi$ และ $A \cap B \neq A$ ถ้า B เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนแล้ว $A \cap B$ เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนในปริภูมิย่อย $(A, \tau_R^A(X))$

การพิสูจน์ สมมติว่า $A \cap B$ ไม่เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนในปริภูมิย่อย $(A, \tau_R^A(X))$

ดังนั้นมีเซตเปิดเล็กสุดนาโน $H \neq \phi$ ในปริภูมิย่อย $(A, \tau_R^A(X))$ ซึ่ง $H \subset A \cap B$

เนื่องจาก B เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน $(U, \tau_R(X))$ และ $A \cap B \neq \phi$

โดยทฤษฎีบท 2.2.1 (1) ได้ว่า $B \subset A$ เป็นผลทำให้ $A \cap B = B$

เพราะว่า A เป็นเซตเปิดนอโนใน U ทำให้ H เป็นเซตเปิดนอโนใน U ที่ $\phi \neq H \subset B$

ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐาน B เป็นเซตเปิดเล็กสุดนอโนใน $(U, \tau_R(X))$

ดังนั้น $A \cap B$ เป็นเซตเปิดเล็กสุดนอโนในปริภูมิย่อย $(A, \tau_R^A(X))$

□

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยในครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอสมบัติบางประการของเซตเปิดเล็กสุดนาโน และใหญ่สุดนาโนมีสองข้อคือ สร้างบทนิยามของเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตเปิดใหญ่สุดนาโนในปริภูมิทอพอโลยีนาโน และข้อสุดท้ายคือ คิดค้นทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ เกี่ยวกับสมบัติเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตเปิดใหญ่สุดนาโน เป็นการขยายแนวคิดเบื้องต้นจากสามงานวิจัยงานแรก ของ เบนชาไล ไอชานากิ และวิไล ต่อด้วยงานที่สองของเลลิส ทราวาการ์ และคาร์เมล ริชาร์ดตาม ด้วยงานของ เลลิส ทราวาการ์ คาวิชและอีแวนเจิลไลน์ คริสตินา อันเกิดผลประโยชน์ที่คาดว่าจะ ได้รับด้านวิชาการมีองค์ความรู้ใหม่ทางคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ ทำให้ได้เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึง ผลสรุปของการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะตามหัวข้อดังนี้

5.1 สรุปผลการวิจัย

5.1.1 บทนิยามเซตเปิด(ปิด)เล็กสุดนาโน และเซตเปิด(ปิด)ใหญ่สุดนาโน

สำหรับปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน $(U, \tau_R(X))$ ซึ่ง A, H, G, E, F เป็นเซตย่อยแท้ที่ไม่เป็นเซตว่างของ U

(1) จะเรียก A ว่าเซตเปิดเล็กสุดนาโน (minimal nano open set) ถ้าเซตเปิดนาโนที่ถูกบรรจุใน A คือ ϕ หรือ A เท่านั้น เราเขียนแทนเซตของเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U ด้วย $mNO(U)$ นั่นคือ $A \in mNO(U)$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับสำหรับทุกๆ $H \in NO(U)$ ที่ $H \subseteq A$ จะได้ว่า $H = \phi$ หรือ $H = A$

(2) จะเรียก A ว่าเซตเปิดใหญ่สุดนาโน (maximal nano open set) ถ้าเซตเปิดนาโนที่บรรจุ A คือ U หรือ A เท่านั้น เซตของเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U เขียนแทนด้วย $MNO(U)$ นั่นคือ $A \in MNO(U)$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับสำหรับทุกๆ $G \in NO(U)$ ที่ $A \subseteq G$ จะได้ว่า $G = U$ หรือ $G = A$

(3) จะกล่าวว่า F เป็นเซตปิดใหญ่สุดนาโน (nano maximal closed set) ก็ต่อเมื่อเซตปิดนาโนใดๆที่บรรจุ F คือ U หรือ F นั่นคือ ถ้า E เป็นเซตปิดนาโนซึ่ง $F \subseteq E$ แล้ว $F = U$ หรือ $F = E$

(4) จะกล่าวว่า F เป็นเซตปิดเล็กสุดนาโน (nano minimal closed set) ก็ต่อเมื่อ เซตปิดนาโนใดๆ ที่ถูกบรรจุใน F คือ F หรือ ϕ นั่นคือ ถ้า E เป็นเซตปิดนาโนซึ่ง $E \subseteq F$ แล้ว $F = E$ หรือ $F = \phi$

5.1.2 สมบัติของเซตเปิดเล็กสุดนาโน และเซตเปิดใหญ่สุดนาโน

5.1.2.1 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และ A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U จะได้ว่า

- (1) ถ้า x เป็นสมาชิกใน A แล้ว $A \subset W$ สำหรับแต่ละ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$
- (2) $A = \cap \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U)\}$ สำหรับแต่ละ $x \in A$
- (3) ถ้า $x \in U - A$ และ W เป็นย่านใกล้เคียงเปิดนาโนของ x ใน U แล้ว $W \cap A = \phi$ หรือ $A \subset W$

5.1.2.2 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และ A, B, C เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U จะได้ว่า

- (1) ถ้า $x \in A$ และสำหรับแต่ละย่านใกล้เคียงเปิดนาโน W ของ x แล้วจะได้ว่า $W \cup A = U$ หรือ $W \subset A$ อย่างใดอย่างหนึ่ง
- (2) ถ้า $A \neq B$ และ $A \cap B \subset C$ แล้ว $A = C$ หรือ $B = C$
- (3) ถ้า $A \neq B \neq C \neq A$ (นั่นคือแต่ละเซตแตกต่างกันทั้งหมด) แล้ว

$$A \cap B \subsetneq A \cap C$$

- (4) ถ้า x เป็นสมาชิกใน B แล้ว $B = \cup \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U), W \cup B \neq U\}$

- (5) ถ้า x เป็นสมาชิกใน $U - A$ แล้ว $U - A \subset W$ สำหรับทุก ๆ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$

- (6) $N\text{int}(U - A) = U - A$ หรือ $N\text{int}(U - A) = \phi$ ($Ncl(A) = U$ หรือ $Ncl(A) = A$)

- (7) ถ้า D เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ $U - A$ แล้ว $Ncl(D) = U - A$
- (8) ถ้า $U - A$ มีสมาชิกอย่างน้อยสองตัวแล้ว $Ncl(U - \{a\}) = U$ สำหรับ $a \in (U - A)$

- (9) ถ้า D เป็นเซตย่อยแท้ของ U ที่ $A \subset D$ แล้ว $N\text{int}(D) = A$
- (10) ถ้า D เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ $U - A$ แล้ว $U - Ncl(D) = N\text{int}(U - D) = A$

(11) ถ้า D เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ U และ $A \subset D$ แล้ว D เป็นเซตพรีเปิดนาโน

(12) ถ้า D เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U แล้ว $A \subset D$ หรือ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโนอย่างใดอย่างหนึ่ง

(13) ถ้า A ไม่เป็นเซตหนาแน่นนาโน แล้ว $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน

(14) ถ้า $A \neq B$ และ $A \cap B$ เป็นเซตปิดนาโน แล้ว $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน

5.1.2.3 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า U มีเซตย่อยที่เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดนาโนเซตเปิดเล็กสุดนาโนแล้วเซตดังกล่าวเป็นเซตเปิดนาโนไม่ซัด หรือ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโนอย่างใดอย่างหนึ่ง

5.1.2.4 สำหรับ A และ B เป็นเซตเปิดนาโนใน U ซึ่ง $A \cap B \neq \emptyset$ และ $A \cap B \neq A$ ถ้า B เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนแล้ว $A \cap B$ เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนในปริภูมีย่อย $(A, \tau_R^A(X))$

5.1.3 สมบัติของเซตปิดเล็กสุดนาโน และเซตปิดใหญ่สุดนาโน

5.1.3.1 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน

(1) ถ้า F เป็นเซตปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ E เป็นเซตปิดเล็กสุดนาโน แล้ว $E \subset F$ หรือ $F \cup E = U$, $F \cap E = \emptyset$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

(2) ถ้า F เป็นเซตปิดใหญ่สุดนาโนและเซตปิดเล็กสุดนาโนใน U แล้วได้ว่า

(2.1) F เป็นเซตย่อยแท้ที่เป็นเซตปิดนาโนเพียงเซตเดียว

(2.2) ถ้า E เป็นเซตย่อยแท้และเป็นเซตปิดนาโนใน U แล้ว $F \cup E = U$ และ $F \cap E = \emptyset$

(3) ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดและเซตปิดเล็กสุดนาโนใน U และ F เป็นเซตทั้งเซตเปิดและเซตปิดนาโนแล้ว $F \subset A$ หรือ $A \cup F = U$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

(4) ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตปิดใหญ่สุดนาโน B เป็นเซตเปิดนาโนและ F เป็นเซตปิดนาโนใน U แล้วข้อต่อไปนี้จริง

(4.1) $F \subset A \subset B$

(4.2) $A \subset B$ และ $A \cup F = U$

(4.3) $A \cap B = \emptyset$ และ $F \subset A$

(4.4) $A \cup F = U$ และ $A \cap B = \emptyset$

5.2 อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

5.2.1 อภิปรายผล

ด้วยผู้วิจัยได้ศึกษารายละเอียดจากบทความวิจัยเรื่อง On minimal open sets and maps in topological spaces ของ Benchalli, S.S., Ittanagi, M., and Wali, R. S. และบทความวิจัยเรื่อง On nano continuity ของ Lellis Thivagar, M., and Carmel Richard ทำให้บทนิยามและสมบัติต่างๆของเซตเปิดเล็กสุดนาโน เซตเปิดใหญ่สุดนาโน เซตปิดเล็กสุดนาโน และเซตปิดใหญ่สุดนาโนดังหัวข้อ 5.1.1-5.1.3 สอดคล้องกับบทความวิจัยของ Lellis Thivagar, M., Kavith, J., and Evangeline Kristina Lily, D. เรื่อง Minimal and Maximal Open Sets in Nano Topological Spaces และผลจากการประยุกต์ใช้ทฤษฎีที่ได้ดังกล่าวทำให้ได้บทแทรกจำนวน 10 บทแทรก นอกจากนั้นผู้วิจัยนำความรู้เรื่องเซตหนาแน่นนาโนและปริภูมิเชิงทอพอโลยีย่อนาโนในโครงงานทางคณิตศาสตร์ ของ พรรณราย พัวป้อม และกฤษดา ศรีวิชา ทำให้ได้สมบัติข้อ 5.1.2.2. (13) และ 5.1.2.4 ตามลำดับ

5.2.2 ข้อเสนอแนะ

ในอนาคตเราสนใจที่จะศึกษาต่อในประเด็นต่อไปนี้

- (1) นิยามและศึกษาฟังก์ชันต่อเนื่องเล็กสุดนาโน (minimal nano continuous functions) ฟังก์ชันต่อเนื่องใหญ่สุดนาโน (maximal nano continuous functions)
- (2) นิยามและศึกษาเซตปิดเล็กสุดนัยทั่วไปนาโน (nano generalized minimal closed sets) เซตปิดใหญ่สุดนัยทั่วไปนาโน (nano generalized maximal closed sets) บนปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน

บรรณานุกรม

- กฤษดา ศรีวิชา. (2563). **ปริภูมิย่อยในปริภูมิโทพอโลยี**. โครงการทางคณิตศาสตร์ หลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์.
- พรรณราย พัวป้อง. (2563). **เซตหนาแน่นแบบนาโน**. โครงการทางคณิตศาสตร์ หลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์.
- Benchalli, S.S., Ittanagi, M., and Wali, R. S. (2011). **On minimal open sets and maps in topological spaces**. *Journal of computer and mathematical sciences*. 2(2) : 170-398.
- Lellis Thivagar, M., and Carmel Richard. (2013). **On nano continuity**. *Mathematical theory and modeling*. 3(7) : 32-37.
- Lellis Thivagar, M., and Carmel Richard. (2013). **On nano forms of weakly open sets**. *International journal of mathematics and statistics invention*. 1(1) : 32-37.
- Lellis Thivagar, M., Kavith, J., and Evangeline Kristina Lily, D. (2021). **Minimal and Maximal Open Sets in Nano Topological Spaces**. *Advances Mathematics : Scientific Journal* 10(6) : 2675-2686.
- Mukharjee, A. (2017). **More on maximal, minimal open and closed sets**. *Communications of the Korean Mathematical Society*. 32(1) : 175-181.
- Nakaoka, F. and Oda, N. (2001). **Some applications of minimal open sets**. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 27(8) : 471-476.
- Nakaoka, F. and Oda, N. (2003). **Some properties of maximal open sets**. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2003(21) : 1331-1340.

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ-ชื่อสกุล : (ภาษาไทย) นายอาดูน จงรักษ์
(ภาษาอังกฤษ) Mr. Ardoon Jongrak

เลขบัตรประจำตัวประชาชน : 3-6405-00624-40-1

ตำแหน่ง : รองศาสตราจารย์ หลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

ไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) : ardoon.jon@pcru.ac.th

หน่วยงานที่ติดต่อได้สะดวก : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ 83 หมู่ 11 ถนน สระบุรี-หล่มสัก
ตำบลสะเดียง อำเภอเมืองเพชรบูรณ์ จังหวัดเพชรบูรณ์
รหัสไปรษณีย์ 67000 โทรศัพท์ : 0 - 5671 – 7100 ต่อ 1407

วุฒิการศึกษา : สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี หลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
วิทยาเขตพิษณุโลก ปีการศึกษา 2527
สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาโท หลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ปีการศึกษา 2535