รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

เงื่อนไขบางประการที่ทำให้เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี

Some Conditions for M-preopen Mappings

อาดุลย์ จงรักษ์

พ.ศ. 2552

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

เงื่อนไขบางประการที่ทำให้เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี
Some Conditions for M-preopen Mappings

ผู้วิจัย **สังกัด**

อาดุลย์ จงรักษ์ **คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี**

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณบำรุงการศึกษา

มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ ประจำปี พ.ศ.2551

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้สำเร็จได้ ด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจากคณาจารย์หลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ทุกท่าน และผู้ช่วยศาสตราจารย์ยงยุทธ สุยอย ที่กรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญ แนะนำ ตรวจสอบ พร้อมทั้งจัดหาหนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย ให้ผู้วิจัยได้ค้นคว้า ผู้วิจัยขอขอบพระคุณเป็นอย่างยิ่ง

ท้ายสุด ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดาของผู้วิจัย คุณบัวพัน แสงพันธุ์และขอขอบคุณภริยาและบุตรของผู้วิจัย ที่สนับสนุนและให้กำลังใจมาตลอด จนผลงานสำเร็จสมบูรณ์

อาดุลย์ จงรักษ์

สารบัญ

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้สำเร็จได้ ด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจากคณาจารย์หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ทุกท่าน และผู้ช่วยศาสตราจารย์ยงยุทธ สุยอย ที่กรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญ แนะนำ ตรวจสอบ พร้อมทั้งจัดหาหนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย ให้ผู้วิจัยได้ค้นคว้า ผู้วิจัยขอขอบพระคุณเป็นอย่างยิ่ง

ท้ายสุด ขอกราบพระคุณบิดา มารดาของผู้วิจัย คุณบัวพัน แสงพันธุ์และขอขอบคุณ คุณสุภาภรณ์ จงรักษ์ เด็กชายธีรัจน์ จงรักษ์ และเด็กชายพีรเศรษฐ์ จงรักษ์ซึ่งภริยาและบุตรของผู้วิจัยที่สนับสนุนและให้กำลังใจมาตลอดจนผลงานสำเร็จสมบูรณ์

อาดุลย์ จงรักษ์

หัวข้อวิจัย เงื่อนไขบางประการที่ทำให้เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี

(Some Conditions for M-preopen Mappings)

ชื่อผู้วิจัย ผู้ช่วยศาสตราจารย์อาดุลย์ จงรักษ์

มหาวิทยาลัย มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

ปีการศึกษา 2551

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อหาเงื่อนไขบางประการที่ทำให้ฟังก์ชันเป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี และหาสมบัติบางประการที่เกี่ยวกับการส่งเปิดแบบเอ็มพรี จากการศึกษาฟังก์ชัน $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี เมื่อ (X,τ) (X,τ) เป็นปริภูมิกระชับแบบเข้มเฉพาะที่ และเฮาส์ดอร์ฟแบบพรี ที่มีคุณสมบัติว่า $\{x\}\notin PO(X)$ สำหรับแต่ละ $x\in X$ ฉ เป็นปริภูมิเชื่อมโยงเฉพาะที่และเฮาส์ดอร์ฟแบบพรีที่มีคุณสมบัติว่าไม่มีเซตย่อยเปิดแบบพรีและเชื่อมโยงแบบพรี บรรจุจุดตัดแบบพรี f เป็นฟังก์ชันพรีเออเรสโซลุท และ $f_{|X-A}$ เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี สำหรับ $A\subset X$ โดยที่ A เป็นเซตของจุดเอกเทศแบบพรี สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่องแบบออลโมสวิคลี่ที่เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบออลโมสพรี

Reseach Some Conditions for M-preopen Mappings

Name Assist. Prot. Ardoon Jongrak

University Rajabhat Phetchabun University

Year 2008

Abstract

The purpose of this research is to find some conditions for M-preopen mappings and some of their properties. The study shows that, the function $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ is M-preopen Mappings is (X,τ) is locally strongly compact and preHausdorff spaces such that $\{x\}\notin PO(X)$ for each x in X , (Y,σ) is locally preconnected and preHausdorff spaces such that no preconnected preopen subset of Y contains a precut point, f is preirresolute and $f_{|X-A}$ is M-preopen mappings for a subset A of X consisting of preisolated points. For a almost weakly continuous and M-preopen mappings f from (X,τ) into (Y,σ) then f is a almost precontinuos.

บทที่1
บทนำ

ปี ค.ศ.1982 Mashhour,A.S. และคณะ [18] ได้นิยามเซตเปิดแบบพรี (preopen sets) จากนั้นนำเซตเปิดแบบพรีเป็นจุดเริ่มเพื่อสร้างบทนิยามของ จุดข้างในแบบพรี (preinterior point) จุดลิมิตแบบพรี (prelimit point) เซตอนุพัทธ์แบบพรี (prederived set) ขอบแบบพรีของเซต (prefontier of set) ส่วนปิดคลุมแบบพรีของเซต (preclosure of set) และ ส่วนภายในแบบพรีของเซต (preinterior of set) ศึกษาสมบัติต่างๆของสิ่งที่นิยามขึ้นมาซึ่งเป็นความรู้พื้นฐานสำคัญ อันจะนำไปขยายหรือต่อยอดหลายเรื่องในวิชาคณิตศาสตร์แขนงทอพอโลยี ปี ค.ศ.1998 Navalagi , G.B. [18] นำเซตเปิดแบบพรีสร้างบทนิยามของย่านใกล้เคียงแบบพรี(pre-neighbourhoods) ศึกษาสมบัติต่างๆของย่านใกล้เคียงแบบพรีในลักษณะทำนองเดียวกับย่านใกล้เคียงนิยามเดิมที่เกี่ยวข้องกับเซตเปิด นิยามและศึกษาสมบัติของเซตเรกูลาร์แบบพรี (preregular set) จนถึงปี ค.ศ.2007 Dontchev ,J.[12] ได้สำรวจและรวบรวมงานวิจัยที่ใช้และเกี่ยวข้องกับเซตเปิดแบบพรี สำหรับหัวข้อฟังก์ชันที่นิยามในเทอมของเซตเปิดแบบพรี มีบทนิยามการส่งเปิดแบบพรี (preopen mappings) ดังนี้ กำหนดให้ (X, τ) และ (Y, σ) เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี จะเรียกฟังก์ชัน $f:(X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ ว่าการส่งเปิดแบบพรีบน X ก็ต่อเมื่อ อิมเมจของแต่ละเซตเปิดเป็นเซตเปิดแบบพรี นั่นคือ f จะเป็นการส่งเปิดแบบพรีบน X ก็ต่อเมื่อ f(u) เป็น เซตเปิดแบบพรี สำหรับแต่ละเซตเปิด u ใน X ปี ค.ศ.1984 Mashhour,A.S. และคณะ [19] ได้นิยาม การส่งเปิดแบบเอ็มพรี ว่าสำหรับปริภูมิเชิงทอพอโลยี (X, τ) และ (Y, σ) จะเรียกฟังก์ชัน $f:(X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ ว่าการส่งเปิดแบบเอ็มพรีบน X ก็ต่อเมื่อ อิมเมจของแต่ละเซตเปิดแบบพรี เป็นเซตเปิดแบบพรี นั่นคือ f จะเป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรีบน X ก็ต่อเมื่อ f(u) เป็น เซตเปิดแบบพรี สำหรับแต่ละเซตเปิดแบบพรี u ใน X ในปี ค.ศ.1989 Corwe,J. และ Samperi,D. [10] ได้เพิ่มเงื่อนไขบางเงื่อนไขสำหรับฟังก์ชันต่อเนื่อง $f:(X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ แล้วทำให้ f เป็นฟังก์ชันเปิดหรือการส่งแบบเปิด

จากแนวคิดดังกล่าวผู้วิจัยจึงใช้ประโยชน์ของเซตเปิดแบบพรีในการเพิ่มเงื่อนไข เพื่อบรรลุวัตถุประสงค์ของงานวิจัยทั้งสองข้อคือ ข้อแรกศึกษาสมบัติเพิ่มเติมของปริภูมิเชื่อมโยงแบบพรีเฉพาะที่ และข้อที่สอง หาเงื่อนไขที่จำเป็นที่ทำให้ฟังก์ชัน $f:(X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี

การเรียบเรียงเนื้อหาของงานวิจัยนี้แบ่งเป็นบทๆดังนี้ บทที่ 2 กล่าวถึงความรู้พื้นฐานสำหรับใช้อ้างอิงในบทต่อไป ซึ่งจะไม่แสดงการพิสูจน์เนื่องจากมีการพิสูจน์ในเอกสารบรรณานุกรมท้ายเล่ม บทที่ 3 เป็นบทสำคัญของงานวิจัยนี้ ส่วนแรกศึกษาสมบัติเพิ่มเติมของปริภูมิเชื่อมโยงแบบพรีเฉพาะที่ และนำไปประยุกต์ในส่วนที่สอง หาเงื่อนไขที่จำเป็นที่ทำให้ฟังก์ชัน$f:(X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี บทที่ 4 เป็นการสรุปเนื้อหางานวิจัยนี้ทั้งหมด

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

ในวิชาทอพอโลยีเบื้องต้น เราทราบกันดีว่า สมาชิกในปริภูมิเชิงทอพอโลยีเป็นเซตเปิดและศึกษาสมบัติต่าง ๆ ในปริภูมิเชิงทอพอโลยี ก็ล้วนจะเกี่ยวข้องกับเซตเปิด สำหรับบทนี้จะกล่าวถึงเซตเปิดแบบพรีซึ่งเป็นเซตที่ใหญ่กว่าเซตเปิด และศึกษาสมบัติที่จำเป็นเกี่ยวกับเซตเปิดแบบพรีซึ่งต้องใช้อ้างอิงในบทที่ 3 โดยจะกล่าวถึงบทนิยาม และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง ในลักษณะไม่มีการพิสูจน์

2.1 เซตเปิดแบบพรี

บทนิยาม 2.1.1 ให้ (X,τ) เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี , A เป็นเซตย่อยของ X เรียก A ว่า เซตเปิดแบบพรี (preopen set) ถ้า $A \subset \text{int}(\text{cl}(A))$ เรียกส่วนเติมเต็ม(complement) ของเซตเปิดแบบพรี ว่า เซตปิดแบบพรี (preclosed set)

เซตของเซตเปิดแบบพรี ทั้งหมดใน X เขียนแทนด้วย PO(X) เซตของเซตเปิดแบบพรีทั้งหมดที่บรรจุ $x \in X$ เขียนแทนด้วย PO(x) ในทำนองเดียวกัน เซตของเซตปิดแบบพรี ทั้งหมดใน X เขียนแทนด้วย PF(X) และเซตของเซตปิดแบบพรีทั้งหมดที่บรรจุ $x \in X$ เขียนแทนด้วย PF(x)

บทนิยาม 2.1.2 ให้ $x \in X$ เรียก $U \subset X$ ว่า ย่านใกล้เคียงแบบพรี (pre-neighbourhood) ของ x ใน X ถ้ามี $A \in \text{PO}(x)$ ซึ่ง $A \subset U$

บทนิยาม 2.1.3 ผลผนวกของเซตเปิดแบบพรีทั้งหมดที่ถูกบรรจุด้วย A เรียกว่า ภายในแบบพรี (preinterior) ของ A เขียนแทนด้วย A_* หรือ pint(A)

ดังนั้น $A_* = \cup\left\{G \mid G\text{เป็นเซตเปิดแบบพรีที่ } G \subset A\right\}$

เนื่องจากผลผนวกของเซตเปิดแบบพรีเป็นเซตเปิดแบบพรี จึงได้ว่า A_* เป็นเซตเปิดแบบพรี

บทนิยาม 2.1.4 ผลตัดของเซตปิดแบบพรีทั้งหมดที่มี A เป็นเซตย่อย เรียกว่า ส่วนปิดคลุมแบบพรี (preclosure) ของ A เขียนแทนด้วย A^* หรือ pcl(A)

ดังนั้น $A^* = \cap\left\{F \mid F\text{เป็นเซตปิดแบบพรีซึ่ง } A \subset F\right\}$

หมายเหตุ สำหรับเซตย่อย A ใด ๆ ของ X จะได้ว่า

(1) $A^* \subset cl(A)\left[pcl(A) \subset cl(A)\right]$

(2) $A^* = A \cup cl(int(A))\left[pcl(A) = A \cup cl(int(A))\right]$

(3) $x \in A_* \leftrightarrow A$ เป็นย่านใกล้เคียงแบบพรีของ x

(4) เนื่องจากทุกเซตเปิดเป็นเซตเปิดแบบพรีทำให้ทุกจุดภายในของ A เป็นจุดภายในแบบพรีของ A ดังนั้น $int(A) \subset A_*$

(5) ทุกๆ จุดลิมิตแบบพรีของ A เป็นจุดลิมิตของ A

บทนิยาม 2.1.5 เรียกจุด $x \in X$ ว่าจุดภายในแบบพรี (preinferior point) ของ $A \subset X$ ก็ต่อเมื่อ $x \in A_*$

บทนิยาม 2.1.6 เรียกจุด $x \in X$ ว่าจุดลิมิตแบบพรี (prelimit point) ของ $A \subset X$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $U \in PO(x)$ จะได้ว่า $U \cap \left(A - \{x\}\right) \neq \phi$

และเรียกเซตของจุดลิมิตแบบพรีของ A ทั้งหมดว่า เซตอนุพัทธ์แบบพรี (prederived set) ของ A เขียนแทนด้วย pd(A) โดยทั่วไปแล้ว $pd(A) \subset d(A)$

บทนิยาม 2.1.7 ให้ $A \subset X$ และ $p \in X$ เรียก p ว่าจุดเอกเทศแบบพรี (preisolated point) ของ A ก็ต่อเมื่อ $p \in A$ และ p ไม่เป็นจุดลิมิตแบบพรีของ A

บทนิยาม 2.1.8 ให้ $A \subset X$ ขอบแบบพรีของ A เขียนแทนด้วย pfr(A)

นั่นคือ $pfr(A) = A^* - A_* = pcl(A) - p\,int(A)$ และเห็นได้ชัดว่า $pfr(A) \subset Fr(A)$

ทฤษฎีบท 2.1.1 ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี, $A \subset X$ A เป็นเซตเปิดแบบพรีใน τ ก็ต่อเมื่อ A เป็นย่านใกล้เคียงแบบพรีของทุกสมาชิกใน A

หมายเหตุ

1) G เป็นเซตเปิดแบบพรี ก็ต่อเมื่อ G เป็นย่านใกล้เคียงแบบพรีของทุกสมาชิกใน G
2) G เป็นเซตเปิดแบบพรี ก็ต่อเมื่อ G = pint(G)
3) A เป็นเซตปิดแบบพรี ก็ต่อเมื่อ A = pcl(A)

2.2 ปริภูมิเชื่อมโยงแบบพรี ปริภูมิกระชับแบบเข้มและปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟแบบพรี

บทนิยาม 2.2.1 ปริภูมิเชิงทอพอโลยี (X,τ) เรียกว่า ปริภูมิเชื่อมโยงแบบพรี (preconnected spaces) ก็ต่อเมื่อ ไม่มีเซตย่อยเปิดแบบพรี G , H ใน X ที่ $G \neq \phi, H \neq \phi, G \cap H = \phi$ และ $G \cup H = X$

และจะเรียก $A \subset X$ ว่าเซตเชื่อมโยงแบบพรี (preconnected set) ถ้าปริภูมิย่อย (A, τ_A) เป็นปริภูมิเชื่อมโยงแบบพรี

บทนิยาม 2.2.2 ให้ (X,τ) เป็นปริภูมิเชื่อมโยงแบบพรี และ $x \in X$ จะเรียก x ว่า จุดตัดแบบพรี (precut point) ของ X ก็ต่อเมื่อ $X - \{x\}$ เป็นเซตเชื่อมโยงแบบพรี

บทนิยาม 2.2.3 เรียก X ว่าเชื่อมโยงแบบพรีเฉพาะที่ (locally preconnected) ที่ $x \in X$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละเซตเปิดแบบพรี V ที่บรรจุ x มีเซต U ที่เป็นเซตเปิดและเซตเชื่อมโยงแบบพรีที่ $x \in U \subset V$

และจะเรียก (X,τ) ว่าปริภูมิเชื่อมโยงแบบพรีเฉพาะที่ (locally preconnected spaces) ถ้า X เชื่อมโยงแบบพรีเฉพาะที่ทุก $x \in X$

บทนิยาม 2.2.4 สำหรับปริภูมิเชิงทอพอโลยี (X,τ) จะเรียก X ว่าปริภูมิกระชับแบบเข้ม (strongly compact) ก็ต่อเมื่อทุก ๆ เซตปกเปิดแบบพรี (preopen cover)ของ X มีเซตปกย่อย (subcover) เป็นเซตจำกัด

และถ้าปริภูมิย่อย (A, τ_A) ของ (X,τ) เป็นปริภูมิกระชับแบบเข้ม แล้วจะเรียกเซต A ว่าเซตกระชับแบบเข้ม (strongly compact set)

บทนิยาม 2.2.5 ปริภูมิเชิงทอพอโลยี (X, τ) จะเป็นปริภูมิกระชับแบบเข้มเฉพาะที่ (locally strongly compact) ก็ต่อเมื่อแต่ละ $x \in X$ มีย่านใกล้เคียงเป็นเซตกระชับแบบเข้ม

บทนิยาม 2.2.6 เรียกปริภูมิเชิงทอพอโลยี (X,τ) ว่าปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟแบบพรี (preHousdorff spaces or pre-T_2) ก็ต่อเมื่อ แต่ละ x , y ใน X ที่ $x \neq y$ จะมีเซตเปิดแบบพรี U ของ x และเซตเปิดแบบพรี V ของ y ที่ $U \cap V = \phi$

ทฤษฎีบท 2.2.1 ทุกสับเซตปิดแบบพรี F ของปริภูมิกระชับแบบเข้ม (X, τ) เป็นเซตกระชับแบบเข้ม

ทฤษฎีบท 2.2.2 ถ้า (X, τ) เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟแบบพรี แล้วทุกสับเซตของ X ที่เป็นเซตกระชับแบบพรีเป็นเซตปิดแบบพรี

ทฤษฎีบท 2.2.3 ถ้า (X, τ) เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟแบบพรี แล้ว(X, τ) เป็นปริภูมิกระชับเฉพาะที่แบบพรี ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $x \in X$ และแต่ละย่านใกล้เคียงแบบพรี V ของ x จะมีย่านใกล้เคียงเปิดแบบพรี U ของ x ที่ pcl(U) เป็นเซตกระชับแบบพรีและ $U \subset pcl(U) \subset V$

2.3 ฟังก์ชันต่อเนื่องแบบพรี

บทนิยาม 2.3.1 ให้ $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ เป็นฟังก์ชัน และ $x \in X$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบพรีที่ x ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละย่านใกล้เคียง U ของ f(x) จะได้ว่า $f^{-1}(U)$ เป็นย่านใกล้เคียงแบบพรีของ x

f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบพรี (บน X) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบพรีที่ทุก x ใน X

จากบทนิยาม 2.3.1 จะเห็นได้ว่าฟังก์ชัน $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ เรียกว่า ฟังก์ชันต่อเนื่องแบบพรี (precontinuous function) ถ้าพรีอิมเมจของเซตเปิด เป็นเซตเปิดแบบพรี

นั่นคือ $\forall G \in \tau$ ได้ว่า $f^{-1}(G) \in PO(X)$

ทฤษฎีบท 2.3.1 ถ้าฟังก์ชัน $f : (X, \tau) \rightarrow (Y,U)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบพรี แล้วจะได้ว่าสำหรับแต่ละเซตเปิดแบบพรี G ใน U ได้ว่า $f^{-1}(G)$ เป็นเซตเปิดแบบพรีใน τ

ทฤษฎีบท 2.3.2 ให้ $f : (X, \tau) \rightarrow (Y,U)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบพรี ถ้า X เป็นปริภูมิกระชับแบบพรี แล้ว f(X) เป็นปริภูมิกระชับแบบพรีใน Y

2.4 การส่งเปิดแบบพรี

บทนิยาม 2.4.1 ให้ $f:(X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ เป็นฟังก์ชัน และ $x \in X$ จะกล่าวว่า f เป็นการส่งเปิดแบบพรี (preopen mapping) ที่ $x \in X$ ก็ต่อเมื่อแต่ละย่านใกล้เคียงเปิด V ของ x จะมีย่านใกล้เคียงแบบพรี U ของ f(x) ที่ $U \subset f(V)$

f เป็นการส่งเปิดแบบพรี (บน X) ก็ต่อเมื่อ f เป็นการส่งเปิดแบบพรีที่ทุก x ใน X

จากบทนิยาม 2.4.1 ฟังก์ชัน $f:(X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ เรียกว่า การส่งเปิดแบบพรี (preopen mapping) ก็ต่อเมื่อ อิมเมจของทุก ๆ เซตเปิดเป็นเซตเปิดแบบพรี

นั่นคือ $\forall G \in \tau$ ได้ว่า $f(G) \in PO(Y)$

ทฤษฎีบท 2.4.1 $f:(X, \tau) \rightarrow (Y,U)$ เป็นการส่งเปิดแบบพรี จะได้ว่า ถ้า A เป็นเซตย่อยเปิดแบบพรีของ X แล้ว f(A) เป็นเซตย่อยเปิดแบบพรีของ Y

บทที่ 3
การส่งเปิดแบบเอ็มพรี

3.1 สมบัติของปริภูมิเชื่อมโยงแบบพรีเฉพาะที่

ในหัวข้อนี้เราได้พบสมบัติประการหนึ่งของปริภูมิเชื่อมโยงแบบพรีเฉพาะที่ ที่เกี่ยวกับจุดตัดแบบพรี จุดเอกเทศแบบพรี และนำไปใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบท 3.1.1 กำหนดให้ (Y,τ) เป็นปริภูมิเชื่อมโยงแบบพรีเฉพาะที่แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) สำหรับแต่ละ $U \in PO(Y)$ ที่เป็นเซตเชื่อมโยงแบบพรี ได้ว่า U ไม่บรรจุจุดตัดแบบพรี

(ii) ให้ $W \in PO(Y)$, ถ้า t เป็นจุดเอกเทศแบบพรีของ $pfr(W)$ แล้ว $t \in p\,int(pcl(W))$

การพิสูจน์ (i)$\rightarrow$(ii) สมมติ(ii) ไม่จริง นั่นคือ มี $W \in PO(Y)$,

t เป็นจุดเอกเทศแบบพรีของ $pfr(W)$ และ $t \notin p\,int(pcl(W))$

เพราะว่า t เป็นจุดเอกเทศแบบพรีของ $pfr(W)$

ทำให้ $t \in pfr(W)$ และ t ไม่เป็นจุดลิมิตแบบพรีของ $pfr(W)$

ดังนั้น มี $V \in PO(Y)$ ที่บรรจุ t และ $V \cap \left(pfr(W) - \{t\}\right) = \phi$

แต่ $pfr(W) = pcl(W) - p\,int(W)$

จึงได้ว่า $V \cap \left((pcl(W) - p\,inf(W)) - \{t\}\right) = \phi$

หรือ $\left(pcl(W) - p\,int(W)\right) \cap \left(V - \{t\}\right) = \phi$ …………………..(1)

เนื่องจาก (Y,τ) เป็นปริภูมิเชื่อมโยงแบบพรีเฉพาะที่

ดังนั้น มี $U \in \tau$ ที่เป็นเซตเชื่อมโยงแบบพรีและ $t \in U \subset V$

จากได้ (i) ได้ว่า $\left(pcl(W) - p\,int(W)\right) \cap \left(U - \{t\}\right) = \phi$

พิจารณา $U - \{t\} = \left(U - \{t\}\right) \cap \left(W \cap W^c\right)$

$$= \left(\left(U - \{t\}\right) \cap W\right) \cup \left(\left(U - \{t\}\right) \cap W^c\right) \quad \text{………..(2)}$$

จะแสดงว่า $\left(U - \{t\}\right) \cap W^c = \left(U - \{t\}\right) \cap \left(pcl(W)\right)^c$

$(\subset)$ สมมติ

$$x \notin \left(U - \{t\}\right) \cap \left(pcl(W)\right)^c \rightarrow x \in \left(\left(U - \{t\}\right) \cap \left(pcl(W)\right)^c\right)^c$$

$$\rightarrow x \in \left(\left(U - \{t\}\right)^c \cup \left(pcl(W)\right)\right)$$

$$\rightarrow x \in \left(U - \{t\}\right)^c \vee x \in \left(pcl(W)\right)$$

ถ้า $x \in (U-\{t\})^c \rightarrow x \in (U-\{t\})^c \vee x \notin W^c$

$\rightarrow x \in (U-\{t\})^c \vee x \in \left(W^c\right)^c$

$\rightarrow x \in \left((U-\{t\})^c \cup x \in \left(W^c\right)^c \right)$

$\rightarrow x \in \left((U-\{t\}) \cap \left(W^c\right) \right)^c$

$\rightarrow x \notin (U-\{t\}) \cap W^c$

ถ้า $x \in pcl(W)$ และ $x \in W \rightarrow x \in W$

$\rightarrow x \in \left(W^c\right)^c$

$\rightarrow x \in \left(W^c\right)^c \vee x \in (U-\{t\})^c$

$\rightarrow x \in \left(W^c\right)^c \bigcup (U-\{t\})^c$

$\rightarrow x \in \left(W^c \cap (U-\{t\})\right)^c$

$\rightarrow x \notin \left(W^c \cap (U-\{t\})\right)$

ถ้า $x \in pcl(W)$ และ $x \notin W \rightarrow x \in pcl(W) \wedge x \notin p\,int(W) \because p\,int(W) \subset W$

$\rightarrow x \in \left(pcl(W) - p\,int(W)\right)$

$\rightarrow x \notin (V-\{t\})$ จาก (1)

$\rightarrow x \notin (U-\{t\})$

$\rightarrow x \in (U-\{t\})^c$

$\rightarrow x \in (U-\{t\})^c \vee x \in \left(W^c\right)^c$

$\rightarrow x \in \left((U-\{t\}) \cap W^c\right)^c$

$\rightarrow x \notin \left((U-\{t\}) \cap W^c\right)$

ดังนั้น $\left(U-\{t\}\right)\cap W^{c} \subset \left(U-\{t\}\right)\cap\left(pcl(W)\right)^{c}$

$(\supset)$ เนื่องจาก $W\subset pcl(W) \rightarrow \left(pcl(W)\right)^{c} \subset W^{c}$

$\rightarrow \left(U-\{t\}\right)\cap\left(pcl(W)\right)^{c} \subset \left(U-\{t\}\right)\cap W^{c}$

ทำให้ $\left(U-\{t\}\right)\cap\left(pcl(W)\right)^{c} = \left(U-\{t\}\right)\cap W^{c}$

จาก (2) ได้ว่า

$U-\{t\} = \left(\left(U-\{t\}\right)\cap W\right)\cup\left(\left(U-\{t\}\right)\cap\left(pcl(W)\right)^{c}\right)$ ....(3)

จาก $t\in pfr(W) = pcl(W) - p\,int(W)$

ทำให้ $t\in pcl(W)$

ดังนั้น $\left(U-\{t\}\right)\cap W \neq \phi$

และ $\left(U-\{t\}\right)\cap W$ เป็นเซตเปิดแบบพรีในปริภูมิย่อย $U-\{t\}$

จะแสดงว่า $\left(U-\{t\}\right)\cap\left(pcl(W)\right)^{c} \neq \phi$

สมมติว่า $\left(U-\{t\}\right)\cap\left(pcl(W)\right)^{c} = \phi$

ได้ว่า $U-\{t\}\subset pcl(W)$

แต่ $t\in U$ และ $t\in pcl(W)$

ได้ว่า $t\in U\subset pcl(W)$

ทำให้ $t\in p\,int(pcl(W))$ ซึ่งขัดแย้งกับข้อสมมติ

ดังนั้น $\left(U-\{t\}\right)\cap\left(pcl(W)\right)^{c} \neq \phi$

และเป็นเซตเปิดแบบพรีในปริภูมิย่อย $U-\{t\}$

โดยบทนิยาม 2.2.1 ได้ว่า $U-\{t\}$ เป็นปริภูมิเชื่อมโยงแบบพรี

และได้ว่า t เป็นจุดตัดแบบพรี

นั่นคือ มี $U\in PO(Y)$ ซึ่งเป็นเซตเชื่อมโยงแบบพรี และบรรจุจุดตัดแบบพรี

(ii)$\rightarrow$(i) สมมติ (i) ไม่จริง

นั่นคือ มี $U\in PO(Y)$ และ $t\in U$ โดยที่ t เป็นจุดตัดแบบพรี

โดยบทนิยามของจุดตัดแบบพรี ได้ว่า

$U-\{t\} = \left(G_1\cap\left(U-\{t\}\right)\right)\cup\left(G_2\cap\left(U-\{t\}\right)\right)$

โดยที่ $G_1\cap\left(U-\{t\}\right)\neq\phi$, $G_2\cap\left(U-\{t\}\right)\neq\phi$

$G_1\neq\phi\neq G_2$ เป็นเซตเปิดแบบพรี , $G_1\cap G_2\neq\phi$ และ $t\notin G_1\cup G_2$

พิจารณา $U-\{t\} = \left(G_1\cap\left(U-\{t\}\right)\right)\cup\left(G_2\cap\left(U-\{t\}\right)\right)$

$$= \left(G_1 \cap U \cap \{t\}^c\right) \cup \left(G_2 \cap U \cap \{t\}^c\right)$$

$$= \left(G_1 \cap U\right) \cup \left(G_2 \cap U\right) \cap \{t\}^c$$

$$U \cap \{t\}^c = \left(W_1 \cup W_2\right) \cap \{t\}^c$$

เมื่อ $G_1 \cap U = W_1$ และ $G_2 \cap U = W_2$

$U = W_1 \cup W_2 \cup \{t\}$ ....(4)

พิจารณา $\left(G_1 \cap \left(U - \{t\}\right)\right) \cap \left(G_2 \cap \left(U - \{t\}\right)\right) = \phi$

$$\left(G_1 \cap U \cap \{t\}^c\right) \cap \left(G_2 \cap U \cap \{t\}^c\right) = \phi$$

$$\left(W_1 \cap \{t\}^c\right) \cap \left(W_2 \cap \{t\}^c\right) = \phi$$

$$\left(\left(W_1 \cap W_2\right) \cap \{t\}^c\right) \cup \{t\} = \phi \cup \{t\}$$

$$\left(\left(W_1 \cap W_2\right) \cup \{t\}\right) \cap \left(\{t\} \cup \{t\}^c\right) = \{t\}$$

$$\because \{t\} \cup \{t\}^c = Y$$

$$\left(W_1 \cap W_2\right) \cup \{t\} = \{t\}$$

..............................(5)

โดยที่ $W_1 \cap W_2 = \phi$ และ $t \notin W_1 \cup W_2$

เพราะว่า (1) $\left(G_1 \cap U\right) \cap \left(G_2 \cap U\right) = \left(G_1 \cap G_2\right) \cap U = \phi \cap U = \phi$

(2) ถ้า $t \in W_1 \cup W_2$ จาก (4) ได้ $U = W_1 \cup W_2$

ทำให้ U เป็นเซตไม่เชื่อมโยงแบบพรี

ต่อไปจะแสดงว่า $t \in pfr(W_1)$ หรือ $t \in pfr(W_2)$

นั่นคือ จะแสดงว่า $t \in \left(pcl(W_1) - p\,int(W_1)\right)$

หรือ $t \in \left(pcl(W_2) - p\,int(W_2)\right)$

สมมติว่า $t \notin pcl(W_1)$ และ $t \notin pcl(W_2)$

ดังนั้น มีย่านใกล้เคียงเปิดแบบพรี A และ B ของ t

ที่ $A \cap W_1 = \phi$ และ $B \cap W_2 = \phi$

เนื่องจาก $U = W_1 \cup W_2 \cup \{t\}$ และ $\{t\} \subset A \cap B$

ทำให้ $U \subset W_1 \cup W_2 \cup (A \cap B)$

ได้ว่า $U \subset U \cap \left(W_1 \cup W_2 \cup (A \cap B)\right)$ ....(6)

เนื่องจาก $(A \cap B) \cup U$, $(W_1 \cup W_2) \cap U$

ต่างก็เป็นเซตเปิดแบบพรีและเป็นเซตย่อยของ U

จึงได้ว่า $\big((A \cap B) \cap U\big) \cup \big((W_1 \cup W_2) \cap U\big) \subseteq U$

หรือ $\big((A \cap B) \cup (W_1 \cup W_2)\big) \cap U \subseteq U$ ....(7)

จาก (6) และ (7) ได้ว่า $\big((W_1 \cup W_2) \cup (A \cap B)\big) \cup U = U$

หรือ $\big((W_1 \cup W_2) \cap U\big) \cup \big((A \cap B) \cap U\big) = U$

โดยที่ $(W_1 \cup W_2) \cap U \neq \phi$, $(A \cap B) \cap U \neq \phi$

และ $\big((A \cap B) \cap U\big) \cap \big((W_1 \cup W_2) \cap U\big)$

$= \big((A \cap B) \cap (W_1 \cup W_2)\big) \cap U$

$= \big((A \cap B \cap W_1) \cup (A \cap B \cap W_2)\big) \cap U$

$= \Big(\big(B \cap (A \cap W_1)\big) \cup \big(A \cap (B \cap W_2)\big)\Big) \cap U = \phi$

เนื่องจาก $A \cap W_1 = \phi$ และ $B \cap W_2 = \phi$

ทำให้ U ไม่เป็นเซตเชื่อมโยงแบบพรี ซึ่งขัดแย้งกับข้อสมมติ

ดังนั้น $t \in pcl(W_1)$ หรือ $t \in pcl(W_2)$

เนื่องจาก $t \notin W_1 \cup W_2$ ทำให้ $t \notin W_1$ และ $t \notin W_2$

แต่ $W_1 , W_2 \in PO(Y)$ ทำให้ $W_1 = p\,int(W_1)$ และ $W_2 = p\,int(W_2)$

จึงได้ว่า $t \in \big(pcl(W_1) - p\,int(W_1)\big)$ หรือ $t \in \big(pcl(W_2) - p\,int(W_2)\big)$

นั่นคือ $t \in pfr(W_1)$ หรือ $t \in pfr(W_2)$

ต่อไปจะแสดงว่า t เป็นจุดเอกเทศแบบพรีของ $pfr(W_1)$

โดยแสดงว่า t ไม่เป็นจุดลิมิตแบบพรีของ $pfr(W_1)$

เนื่องจาก U เป็นย่านใกล้เคียงแบบพรีของ t และเป็นเซตเชื่อมโยงแบบพรี

และ $t \in (pcl(W_1) - pint(W_1))$

จะแสดงว่า $(pcl(W_1) - W_1) \cap U = \{t\}$

สมมติว่ามี $q \in (pcl(W_1) - W_1) \cap U$ โดยที่ $q \neq t$

ได้ว่า $q \in pcl(W_1)$ และ $q \in W_1$

แต่ $U - \{t\} = W_1 \cup W_2$

ทำให้ $q \in W_2$ ซึ่ง W_2 เป็นย่านใกล้เคียงเปิดแบบพรีของ q

จึงได้ $W_1 \cap W_2 \neq \phi$ ซึ่งขัดแย้งกับที่ $W_1 \cap W_2 = \phi$

ดังนั้น ไม่มี $q\ (\neq t)$ อยู่ใน $(pcl(W_1) - W_1) \cap U$

ทำให้ $(pcl(W_1) - W_1) \cap U = \{t\}$

$(pcl(W_1) - W_1) \cap U \cap \{t\} = \{t\} \cap \{t\}^c$

$(pcl(W_1) - W_1) \cap (U - \{t\}) = \phi$

นั่นคือ t ไม่เป็นจุดลิมิตแบบพรีของ $pcl(W_1) - W_1$

แต่ $pcl(W_1) - W_1 = pcl(W_1) - pint(W_1) = pfr(W_1)$

จึงได้ว่า t เป็นจุดเอกเทศแบบพรีของ $pfr(W_1)$

ต่อไปจะแสดงว่า $t \notin pint(pcl(W_1))$

พิจารณาปริภูมิย่อย U จะแสดงว่า $t \notin pint_U(pcl_U(W_1))$

สมมติว่า $t \in pint_U(pcl_U(W_1))$

ดังนั้น มี $H \in PO(U)$ ที่ $t \in H \subset pcl_U(W_1)$

จะแสดงว่า $H \subset W_1 \cup \{t\}$

ให้ $r (\neq t) \in H$ สมมติว่า $r \notin W_1$ เนื่องจาก $U - \{t\} = W_1 \cup W_2$

ได้ว่า $r \in W_2$ ซึ่งเป็นเซตเปิดแบบพรี

ทำให้ได้ $W_1 \cap W_2 \neq \phi$ ขัดแย้ง

ดังนั้น $r \in W_1$ ทำให้ $H \subset W_1 \cup \{t\}$

ต่อไปจะแสดงว่า $W_1 \cup \{t\}$ เป็นเซตเปิดแบบพรีในปริภูมิย่อย U

ให้ $y \in W_1 \cup \{t\}$

ถ้า $y = t$ ได้ว่ามีเซตเปิดแบบพรี H ที่บรรจุ y และ $y \in H \subset W_1 \cup \{t\}$

ถ้า $y \neq t$ ได้ว่ามีเซตเปิดแบบพรี W_1 ที่บรรจุ y และ $y \in W_1 \subset W_1 \cup \{t\}$

ดังนั้น $W_1 \cup \{t\}$ เป็นเซตเปิดแบบพรีในปริภูมิย่อย U

เนื่องจาก $W_2 = G_2 \cap U$ เป็นเซตเปิดแบบพรีในปริภูมิย่อย U

$U = W_2 \cup (W_1 \cup \{t\})$

และ $W_2 \cap (W_1 \cup \{t\}) = (W_2 \cap W_1) \cup (W_2 \cap \{t\}) = \phi \cup \phi = \phi$

ทำให้ U ไม่เป็นเซตเชื่อมโยงแบบพรี ซึ่งขัดแย้ง

ดังนั้นที่สมมติ $t \in pint_U(pcl_U(W_1))$ ไม่จริง นั่นคือ $t \notin pint_U(pcl_U(W_1))$

เนื่องจาก $pint(pcl(W_1)) \cap U \subset pint_U(pcl_U(W_1))$

และจาก $t \in U$ จึงได้ว่า $t \notin pint(pcl(W_1))$

สรุปได้ว่า มี $W_1 \in PO(Y)$ และ t เป็นจุดเอกเทศแบบพรีของ $pfr(W_1)$

แต่ $t \notin pint(pcl(W_1))$ นั่นคือ (ii) ไม่จริง $\square$

3.2 ฟังก์ชันพรีเออเรสโซลุทและเงื่อนไขที่ทำให้เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี

ในหัวข้อนี้เราให้ความหมายของฟังก์ชันพรีเออเรสโซลุท การส่งเปิดแบบเอ็มพรีและนำความรู้ใน บทที่ 2 มาประกอบเป็นเงื่อนไข ทำให้ฟังก์ชันพรีเออเรสโซลุท เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี

บทนิยาม 3.2.1 ฟังก์ชัน $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ จะเรียกว่าพรีเออเรสโซลุท (Preirresolute) ถ้าพรีอิมเมจของแต่ละสับเซตเปิดแบบพรีของ Y เป็นเซตเปิดแบบพรีใน X

บทนิยาม 3.3.2 ฟังก์ชัน $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ จะเรียกว่าการส่งเปิดแบบเอ็มพรี (M-Preopen mapps) ถ้าอิมเมจของแต่ละเซตเปิดแบบพรีเป็นเซตเปิดแบบพรี

ทฤษฎีบท 3.2.1 ให้ (X,τ) เป็นปริภูมิกระชับแบบพรีเฉพาะที่ และเฮาส์ดอร์ฟแบบพรี ที่มีคุณสมบัติว่า $\{x\}\notin PO(X)$ สำหรับแต่ละ $x\in X$, $A\subset X$ โดยที่ A เป็นเซตของจุดเอกเทศแบบพรี (Y,σ) เป็นปริภูมิเชื่อมโยงแบบพรีเฉพาะที่ และเฮาส์ดอร์ฟแบบพรีที่มีคุณสมบัติวา ไม่มีเซตย่อยเปิดแบบพรีและเชื่อมโยงแบบพรี บรรจุจุดตัดแบบพรีถ้า $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ เป็นฟังก์ชันพรีเออเรสโซลุท และ $f_{|X-A}$ เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี แล้ว f เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี

การพิสูจน์ สมมติ มี $x_0\in A$ ซึ่ง f ไม่เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรีที่ x_0

โดยบทนิยาม 3.2.2 ได้ว่ามีย่านใกล้เคียงเปิดแบบพรี V ของ x_0 และสำหรับทุกย่านใกล้เคียงเปิดแบบพรี V_0 ของ $f(x_0)$ ได้ว่า $f(x_0)\in V_0\not\subset f(V)$

นั่นคือ $f(x_0)\notin pint(f(V))$ เนื่องจาก x_0 เป็นจุดเอกเทศแบบพรี ใน A

โดยบทนิยาม 2.1.7 ได้ว่ามีย่านใกล้เคียงแบบพรี U ของ x_0 ที่ $(U-\{x_0\})\cap A=\phi$

ให้ $W=U\cap V$ ซึ่งเป็นย่านใกล้เคียงเปิดแบบพรีของ x_0

ได้ว่า $A\cap(W-\{x_0\})=\phi$

ดังนั้น $W-\{x_0\}\subset X\text{-}A$

จะแสดงว่า $W-\{x_0\}$ เป็นเซตเปิดแบบพรีใน X

ให้ $x\in W-\{x_0\}$

ดังนั้น $x\neq x_0$ เนื่องจาก (X,τ) เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟแบบพรี

ดังนั้นมี $G_x,G_{x_0}\in PO(X)$ ที่ $x\in G_x$, $x_0\in G_{x_0}$ และ $G_x\cap G_{x_0}=\phi$

ได้ว่ามี $G_x\cap G_{x_0}\cap W=(G_x\cap W)\cap(G_{x_0}\cap W)=\phi$

ให้ $H_x = G_x \cap W$ และ $H_{x_0} = G_{x_0} \cap W$ ซึ่งต่างก็เป็นเซตเปิดแบบพรี

โดยที่ $x \in H_x$, $x_0 \in H_{x_0}$ และ $x_0 \notin H_x$

ดังนั้น $x \in H_x \subset W - \{x_0\}$

ได้ว่า $W - \{x_0\}$ เป็นย่านใกล้เคียงแบบพรีของ x สำหรับทุก x ใน $W - \{x_0\}$

นั่นคือ $W - \{x_0\}$ เป็นเซตเปิดแบบพรี

เนื่องจาก $f_{|X-A}$ เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี

ได้ว่า $f_{|X-A}(W - \{X_0\}) = f(W - \{x_0\})$ เป็นเซตเปิดแบบพรีใน Y

เพราะว่า $\mathrm{pint}(f(W - \{x_0\})) = f(W - \{x_0\}) \subset \mathrm{pint}(f(V))$ และ $f(x_0) \notin \mathrm{pint}(f(V))$

ทำให้ $f(x_0) \notin f(W - \{x_0\})$

เนื่องจาก (X, τ) เป็นปริภูมิกระชับแบบเข้มเฉพาะที่

ได้ว่ามีย่านใกล้เคียงเปิดแบบพรี N ของ x_0 ที่ pcl(N) เป็นเซตกระชับแบบเข้ม

และ $x_0 \in N \subset \mathrm{pcl}(N) \subset W$

ได้ว่า $N - \{x_0\} \subset \mathrm{pcl}(N) - \{x_0\} \subset W - \{x_0\}$

ได้ว่า $f(N - \{x_0\}) \subset f(\mathrm{pcl}(N) - \{x_0\}) \subset f(W - \{x_0\})$

ทำให้ได้ว่า $f(x_0) \notin f(N - \{x_0\})$

โดยวิธีทำนองเดียวกับการแสดงว่า $f(W - \{x_0\})$ เป็นเซตเปิดแบบพรี

จะได้ว่า $f(N - \{x_0\})$ เป็นเซตเปิดแบบพรีใน Y

ต่อไปจะแสดงว่า $f(x_0)$ เป็นจุดเอกเทศแบบพรีของ $\mathrm{pfr}(f(N - \{x_0\}))$

สมมติว่า $f(x_0) \notin \mathrm{pfr}(f(N - \{x_0\}))$

ได้ว่า $f(x_0) \notin \mathrm{pel}(f(N - \{x_0\}))$

ดังนั้น มีย่านใกล้เคียงเปิดแบบพรี G ของ $f(x_0)$ ที่ $G \cap (f(N - \{x_0\})) = \phi$

ได้ว่า $f^{-1}(G \cap f(N - \{x_0\})) = f^{-1}(\phi)$

ได้ว่า $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(N - \{x_0\}) = \phi$ ....(1)

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันพรีเออเรสโซลุท

จึงได้ว่า $f^{-1}(G)$ เป็นเซตเปิดแบบพรี ที่บรรจุ x_0

ดังนั้น มีเซตเปิดแบบพรี H ที่ $x_0 \in H \subset f^{-1}(G)$

เนื่องจาก $N - \{x_0\} \subset f^{-1}f(N - \{x_0\})$

จาก (1) จึงได้ว่า $H \cap (N - \{x_0\}) = \phi$

ทำให้ $H \cap N = \{x_0\}$ ซึ่งเป็นเซตเปิดแบบพรี เกิดการขัดแย้งกับกำหนดให้

ดังนั้น $f(x_0) \in \mathrm{pfr}(f(N - \{x_0\}))$ ....(2)

ต่อไปจะแสดงว่า $f(x_0)$ ไม่เป็นจุดลิมิตแบบพรี ของ $pfr(f(N-\{x_0\}))$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเออเรสโซลุท และ pcl(N) เป็นเซตกระชับแบบเข้ม

โดยทฤษฎีบท 2.2.1 ได้ว่า $f(pcl(N))$ เป็นเซตกระชับแบบเข้มใน Y

เพราะว่า (Y, σ) เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟแบบพรี

โดยทฤษฎีบท 2.2.2 ได้ว่า $f(pcl(N))$ เป็นเซตปิดแบบพรีใน Y

เนื่องจาก $pcl(f(N-\{x_0\})) \subset pcl(f(pcl(N))) = f(pcl(N))$

และ $f(pcl(N)) = f(pcl(N)-N) \cup (N-\{x_0\}) \cup \{x_0\}$

$= f(pcl(N)-N) \cup f(N-\{x_0\}) \cup \{f(x_0)\}$

เนื่องจาก pcl(N) และ X-N เป็นเซตปิดแบบพรีใน X

จึงได้ว่า pcl(N)-N เป็นเซตปิดแบบพรีใน X

ทำให้ $pcl(N) \cap (pcl(N)-N)$ เป็นเซตปิดแบบพรีในปริภูมิย่อย pcl(N)

และ pcl(N) เป็นปริภูมิกระชับแบบเข้ม

โดยทฤษฎีบท 2.2.1 ได้ว่า $pcl(N)-N$ เป็นเซตกระชับแบบเข้ม

ทำให้ได้ว่า $f(pcl(N)-N)$ เป็นเซตกระชับแบบเข้ม ใน Y

โดยทฤษฎีบท 2.2.2 ได้ว่า $f(pcl(N)-N)$ เป็นเซตปิดแบบพรีใน Y

เนื่องจาก $f(pcl(N)-N) \subset f(pcl(N)-\{x_0\}) \subset f(W-\{x_0\})$

และ $f(x_0) \notin f(W-\{x_0\})$

ทำให้ $f(x_0) \notin f(pcl(N)-N)$

ได้ว่า $f(x_0) \in (f(pcl(N)-N))^c$ ซึ่งเป็นเซตเปิดแบบพรีใน Y

เนื่องจาก $pcl(f(N-\{x_0\})) \subset pcl(f(pcl(N))) = f(pcl(N))$

ทำให้ $pcl(f(N-\{x_0\})) \cap (f(pcl(N)))^c = \phi$

แต่ $(pcl(f(N-\{x_0\})) - f(N-\{x_0\}) \cap (f(pcl(N)-N))^c - \{f(x_0)\})$

$= pcl(f(N-\{x_0\}) \cap (f(pcl(N)))^c$

ได้ว่า $(pcl(f(N-\{x_0\})) - f(N-\{x_0\})) \cap ((f(pcl(N)-N))^c - \{f(x_0)\}) = \phi$

โดยที่ $(f(pcl(N)-N))^c$ เป็นเซตเปิดแบบพรีที่บรรจุ $f(x_0)$

ดังนั้น $f(x_0)$ ไม่เป็นจุดลิมิตแบบพรีของ

$pcl(f(N-\{x_0\})) - f(N-\{x_0\}) = pfr(f(N-\{x_0\}))$ ....(3)

จาก (2) และ (3) ทำให้ $f(x_0)$ เป็นจุดเอกเทศแบบพรีของ $pfr(f(N-\{x_0\}))$

ต่อไปจะแสดงว่า $f(x_0) \notin p\,int(pcl(f(N)-\{x_0\}))$

เนื่องจาก $pcl(f(N)-x_0) \subset f(pcl(N)) \subset f(V)$

ทำให้ $p\,int(pcl(f(N)-\{x_0\})) \subset p\,int(f(V))$

แต่ $f(x_0) \notin p\,int(f(V))$ จึงทำให้ $f(x_0) \notin p\,int(pcl(f(N-\{x_0\}))$

ดังนั้น (ii) ในทฤษฎีบทที่ 3.1.1 ไม่เป็นจริง จึงได้ข้อ (i) ไม่จริงด้วย

นั่นคือ มี เซตย่อยเปิดแบบพรีที่เป็นเซตเชื่อมโยงแบบพรีใน Y บรรจุจุดตัดแบบพรี

ซึ่งขัดแย้งกับคุณสมบัติของ Y ทำให้ที่สมมตินั้นไม่จริง

ดังนั้น f เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรีที่ x สำหรับทุกๆ $x \in A$

แต่เรามี $f_{|X-A}$ เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี

นั่นคือทำให้ f เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี □

3.3 สมบัติบางประการของการส่งเปิดแบบเอ็มพรี

จากบทนิยามของการส่งเปิดแบบเอ็มพรี ต่อไปจะนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องแบบออลโมสวิคลี่ และต่อเนื่องแบบออลโมสพรี ทำให้เราได้ความสัมพันธ์การส่งเปิดเอ็มพรีกับฟังก์ชันต่อเนื่องแบบออลโมสวิคลี่และต่อเนื่องแบบออลโมสพรี ดังสองทฤษฎีบท

บทนิยาม 3.3.1 ฟังก์ชัน $f:(X,\tau) \rightarrow (Y,\sigma)$ จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบออลโมสวิคลี่ (almost weakly continuous เขียนแบบย่อเป็น a.w.c) ก็ต่อเมื่อ $f^{-1}(V) \subset int(cl(f^{-1}(clV)))$ สำหรับทุก ๆ เซตเปิด V ใน Y

บทนิยาม 3.3.2 ฟังก์ชัน $f:(X,\tau) \rightarrow (Y,\sigma)$ จะเรียกว่าต่อเนื่องแบบออลโมสพรี(almost precontinuous เขียนแบบย่อเป็น a.p.c) ที่จุด $x \in X$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละเซต $V = int(cl(V))$, $V \subset Y$ ที่บรรจุ f(x) จะมี $U \in PO(X,x)$ ซึ่ง $f(U) \subset V$

ถ้า f ต่อเนื่องแบบออลโมสพรีที่ทุก ๆ จุดใน X แล้ว f ต่อเนื่องแบบออลโมสพรีบน X

ทฤษฎีบท 3.3.1 ถ้า $f:(X,\tau) \rightarrow (Y,\sigma)$ เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี และ a.w.c แล้ว f เป็น a.p.c

การพิสูจน์ สมมติว่า $x \in X$ และ $V \in \sigma$ ที่ $f(x) \in V$

เนื่องจาก f เป็น a.w.c

ดังนั้นมี $U \in PO(X,x)$ ซึ่ง $f(U) \subset cl(V)$

เนื่องจาก f เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี

ทำให้ f(U) เป็นเซตเปิดแบบพรีใน Y

และได้ว่า $f(U) \subset int(cl(U))) \subset int(cl(cl(V))) = int(cl(V))$

นั่นคือ $f(U) \subset int(cl(V))$

ดังนั้น f เป็น a.p.c $\square$

ทฤษฎีบท 3.3.2 ถ้า $f:(X,\tau) \rightarrow (Y,\sigma)$ เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี และ a.w.c และฟังก์ชันทั่วถึงและ $g:(Y,\sigma) \rightarrow (Z,\rho)$ เป็นฟังก์ชันซึ่ง $g \circ f:(X,\tau) \rightarrow (Z,\rho)$ เป็น a.p.c แล้ว g เป็น a.p.c

การพิสูจน์ ให้ $y \in Y$ และ $x \in X$ ซึ่ง f(x) = y

ให้ G เป็นเซตซึ่ง $G = int(cl(G))$ ที่บรรจุ $(g \circ f)(x)$

ได้ว่ามี $U \in PO(X,x)$ ซึ่ง $g(f(U)) \subset G$

เนื่องจาก f เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี

ทำให้ $f(U) \in PO(Y,y)$ ซึ่ง $g(f(U)) \subset G$

นั่นคือ g เป็น a.p.c ที่ y

แต่ y เป็นสมาชิกใด ๆ ใน Y

ดังนั้น g เป็น a.p.c บน Y $\square$

บทที่ 4

บทสรุป

จากการที่ได้ศึกษา เงื่อนไขที่ทำให้เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี สรุปได้ตามวัตถุประสงค์ของงานวิจัย ดังนี้

1. ได้เงื่อนไขที่ทำให้ฟังก์ชันเป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี ดังทฤษฎีบทที่กล่าวว่า ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิกระชับแบบพรีเฉพาะที่ และเฮาส์ดอร์ฟแบบพรี ที่มีคุณสมบัติว่า $\{x\} \notin PO(X)$ สำหรับแต่ละ $x \in X$ $A \subset X$ โดยที่ A เป็นเซตของจุดเอกเทศแบบพรี (Y, σ) เป็นปริภูมิเชื่อมโยงแบบพรีเฉพาะที่ และเฮาส์ดอร์ฟแบบพรีที่มีคุณสมบัติว่าไม่มีเซตย่อยเปิดแบบพรี และเชื่อมโยงแบบพรีบรรจุจุดตัดแบบพรี ถ้า $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ เป็นฟังก์ชัพรีเออเรสโซลุท และ $f_{|X-A}$ เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี แล้วจะได้ว่า f เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี

2. ได้สมบัติเพิ่มเติมของการส่งเปิดแบบเอ็มพรี และสมบัติเพิ่มเติมของปริภูมิเชื่อมโยงแบบพรีเฉพาะที่ 3 ทฤษฎีบท คือ

(1) กำหนดให้ (Y,τ) เป็นปริภูมิเชื่อมโยงแบบพรีเฉพาะที่แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) สำหรับแต่ละ $U \in PO(Y)$ ที่เป็นเซตเชื่อมโยงแบบพรี จะได้ว่า U ไม่บรรจุจุดตัดแบบพรี

(ii) ให้ $W \in PO(Y)$ ถ้า t เป็นจุดเอกเทศแบบพรีของ pfr(W) แล้ว $t \in p\,\mathrm{int}(pcl(W))$

(2) ถ้า $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี และ a.w.c แล้ว f เป็น a.p.c

(3) ถ้าฟังก์ชันทั่วถึง $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ เป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี และ a.w.c $g:(Y,\sigma)\rightarrow(Z,\rho)$ เป็นฟังก์ชันซึ่ง $g\circ f:(X,\tau)\rightarrow(Z,\rho)$ เป็น a.p.c แล้วจะได้ว่า g เป็น a.p.c

ข้อเสนอแนะสำหรับผู้ที่จะศึกษา การส่งเปิดแบบเอ็มพรีและขยายงานวิจัยนี้ อาจมีประเด็นที่จะศึกษา ดังต่อไปนี้

1. หาเงื่อนไขอื่นที่ต่างจากงานวิจัยนี้และทำให้ฟังก์ชันเป็นการส่งเปิดแบบเอ็มพรี
2. หาสมบัติเพิ่มเติมอื่น ๆ ที่ต่างจากงานวิจัยนี้
3. สร้างตัวอย่างให้สอดคล้องกับข้อ 1. และข้อ 2.
4. นิยามปริภูมิและฟังก์ชันในเทอมของเซตเปิดแบบพรี

บรรณานุกรม

[1] จินตนา แสนวงษ์. (2540). **โทโพโลยีเบื้องต้น**. เชียงใหม่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

[2] นพพร ธนะชัยขันธ์. (2543). **ทอพอโลยีเบื้องต้น**. กรุงเทพฯ : จูนพับลิชชิ่ง.

[3] ยงยุทธ สุยอย. (2548). **ทอพอโลยีเบื้องต้น**. มหาสารคาม : ภาควิชาคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม.

[4] สมพงษ์ ธรรมพงษา. (2532). **โทโพโลยี**. เชียงใหม่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

[5] สมศักดิ์ โพธิวิจิตร. (2526). **โทโพโลยีเบื้องต้น**. สงขลา : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒสงขลา.

[6] Adams,C.&Franzosa R. (2008). **Introduction to topology pure and applied.** New Jersey : Pearson Education,Inc.

[7] Baker,C.W.(1986). **Characterizations of some near-continuous functions and near-open functions.** Inter. J.Math & Math.Sci. vol.9, no.4 ,pp. 715-720.

[8] Borges,R.C. (2000). **Elementary topology and applications.** New Jersey : World Scientific Publishing.

[9] Cain,J.L. (1994). **Introduction to general topology.** Massachusetts : Addison-Wesley Publishing.

[10] Crowe,J.&Samperi,D.(1989). **On open maps.** The American Mathematical Monthly.vol.96,no3,pp.242-243.

[11] Dannis,R.(1999).**Elementary topology.** New Jersey : Prentice Hall.

[12] Dontchev, J.(2007). **Survey on preopen sets**. [Online]. Available e-mail : dontchev@cc.helsinki.fi.

[13] Dugundji,J.(1966). **Topology.** Boston : Allyn and Bacon.

[14] Fairchild,w.w.&Tulcea,C.I.(1971). **Topology.** Philadelphia : W.B.Saunders company.

[15] Hansen,V.L. (1999). **Fundamental concepts in modern analysis.** Singapore : World Scientific Publishing.

[16] Jafari,G.B.&Noiri,T.(2000). **On almost precontinuous functions .** Inter. J.Math & Math.Sci. vol.24, no.3 ,pp. 193-201

[17] Kor, A. & Bhattacharyya, P.(1992). **Bitopological preopen sets, precontinuity and preopen mapping.** Indian J. Math., 34(3) , 295-309

[18] Mashhlour,A.S., Abd El-Monsef,M.E. & El-Deef,S.N.(1982). **On precontinuous and weak precontinuous mappings.** Proc.Math and Phys. Soc., Egypt53, pp. 47-53.

[19] Mashhlour,A.S., Abd El-Monsef,M.E. & Hasanein,I.A.(1984). **On pretopological spaces.** Bull.Math.soc.sci.Math.R.S.Roumanie(N.S.), Vol.28(76), no.1, pp.39-.

[20] Navalagi, G.B. (1998). **Pre-neighbourhoods.** The Mathematics Education. vol. XXXII, no.4 ,Dec. pp.201-206.

[21] Pervin,W.J. (1964). **Foundation of general topology.** New York : Academic press.

[22] Popa,V.(1987). **Properties of H- almost continuous functions** . Bull.Math.Soc.Sci.Math.R.S . Roumanie(N.S.),vol.31,no.79 ,pp. 163-168.

[23] Sakai, S. (1989). **Unified Characterizations of some Mappings Near to continuous or near to open.** Kyungpook Math.J. vol.29, pp.41-56.

[24] Sims, B.T.(1976).**Fundametal of Topology.** New York : Macmillan publishing co.,Inc.

[25] Steen,L.A. & Seebach, J.A.(1978).**Counterexamples in Topology.** New York : Springer Verlay.