



## รายงานการวิจัย

คุณลักษณะของสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

A characterization of  $S_\beta$ -continuous fixed point property

อาตุลย์ จงรักษ์

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

ประจำปีงบประมาณ 2562

## รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

คุณลักษณะของสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

A characterization of  $S_\beta$ -continuous fixed point property

อาตุลย์ จงรักษ์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์  
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ทุนอุดหนุนโดย มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์  
งบประมาณแผ่นดินที่พิจารณาโดยผ่านความเห็นชอบ  
จากสำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ  
ประเภทโครงการสนับสนุนการวิจัยและนวัตกรรมเพื่อสร้างความเป็นเลิศทางวิชาการ  
ประจำปีงบประมาณ 2562

(ก)

ชื่องานวิจัย   คุณลักษณะของสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

ผู้วิจัย         อาตุลย์ จงรักษ์

สาขาวิชา       สาขาวิชาคณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ ปีเสรีจวิชัย 2562

### บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้เราได้นำความต่อเนื่องแบบเอสเบตตานิยาม สมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าและศึกษาบางคุณลักษณะของ สมบัติความต่อเนื่องแบบเอสเบตตาดังกล่าวพบว่า สำหรับปริภูมิเชิงทอพอโลยี  $(X, \tau)$  ที่เป็นปริภูมิเรกูลาร์และโลคัลลีอินตีสคริตซึ่งมีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ถ้า  $\sigma$  เป็นทอพอโลยีสำหรับ  $X$  ที่เข้มกว่า  $\tau$  และ  $clG^{(\tau)} = clG^{(\sigma)}$  สำหรับทุกเซตเปิด  $G$  ใน  $(X, \sigma)$  แล้ว  $(X, \sigma)$  มีสมบัติจุดตรึง

**คำสำคัญ :** เซตเปิดแบบเซไม; เซตปิดแบบเบต้า; เซตเปิดแบบเอสเบต้า; ความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า; สมบัติจุดตรึง; สมบัติจุดตรึงแบบเอสเบต้า

**Research Title** A characterization of  $S_\beta$ -continuous fixed point property

**Researcher** Ardoon Jongrak

**Department of** Mathematics

Phetchabun Rajabhat University **year** 2019

### Abstract

The purpose of this work is to introduce and study a  $S_\beta$  continuous fixed point property by using  $S_\beta$ -continuity. The study shows that, for the regular and locally indiscrete space  $(X, \tau)$  with the  $S_\beta$  continuous fixed point property. If  $\sigma$  is a topology for  $X$  stronger than  $\tau$  and  $clG^{(\tau)} = clG^{(\sigma)}$  for every open set  $G$  in  $\sigma$ , then  $(X, \tau)$  has the fixed point property.

**Keywords :** semi-open sets;  $\beta$ -closed sets;  $S_\beta$ -closed sets;  $S_\beta$ -continuity; fixed point property;  $S_\beta$ -continuous fixed point property

(ค)

### กิตติกรรมประกาศ

รายงานการวิจัยฉบับนี้สำเร็จได้เป็นอย่างดีด้วยความช่วยเหลืออย่างจริงใจจากคณาจารย์ทุกท่านในหลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.ชัยณรงค์ ชื่นพูนิก รองศาสตราจารย์ ดร.เกียรติศักดิ์ รัตนสีหา และรองศาสตราจารย์สมเกียรติ ชัยพรเจริญศรี ที่คอยแนะนำ ตรวจสอบ เทคนิคการจัดพิมพ์ และให้คำปรึกษาทุกอย่างอย่างตลอดเวลา ในผลงานวิจัยนี้

ท้ายสุดขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดาของผู้วิจัย อาจารย์ที่อบรมสั่งสอนถ่ายทอดความรู้ให้ผู้วิจัย และขอขอบคุณภริยาและบุตรของผู้วิจัยที่สนับสนุนและให้กำลังใจตลอดมา จนผลงานสำเร็จสมบูรณ์

อาตุลย์ จงรักษ์  
กรกฎาคม 2562

## สารบัญ

|                                                                                                                       | หน้า |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| บทคัดย่อภาษาไทย                                                                                                       | ก    |
| บทคัดย่อภาษาอังกฤษ                                                                                                    | ข    |
| กิตติกรรมประกาศ                                                                                                       | ค    |
| สารบัญ                                                                                                                | ง    |
| สารบัญตาราง                                                                                                           | ฉ    |
| สารบัญรูป                                                                                                             | ช    |
| บทที่ 1 บทนำ                                                                                                          | 1    |
| 1.1 ที่มาและความสำคัญ . . . . .                                                                                       | 1    |
| 1.2 วัตถุประสงค์ . . . . .                                                                                            | 1    |
| 1.3 ขอบเขตของการดำเนินการ . . . . .                                                                                   | 2    |
| 1.4 วิธีการดำเนินงาน . . . . .                                                                                        | 2    |
| 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ . . . . .                                                                               | 2    |
| บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน                                                                                                | 4    |
| 2.1 บทนิยามและทฤษฎีบทสำคัญ . . . . .                                                                                  | 4    |
| บทที่ 3 การดำเนินการวิจัย                                                                                             | 13   |
| 3.1 การศึกษาความรู้พื้นฐาน . . . . .                                                                                  | 13   |
| 3.2 การศึกษาความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าและสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบ<br>เดลต้า . . . . .                              | 13   |
| 3.3 สร้างบทนิยามรีแทรกซ์ความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าและบทนิยามสมบัติจุด<br>ตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า . . . . .         | 13   |
| 3.4 การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างรีแทรกซ์ความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าและ<br>สมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า . . . . . | 14   |
| 3.5 การสร้างตัวอย่างประกอบบทนิยามที่นำเสนอและพิสูจน์ทฤษฎีบท . . . . .                                                 | 14   |
| 3.6 สรุปผลการวิจัย . . . . .                                                                                          | 15   |

(จ)

## สารบัญ (ต่อ)

|                   |                                                                               |           |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>บทที่ 4</b>    | <b>ผลดำเนินการวิจัย</b>                                                       | <b>16</b> |
| 4.1               | รีแฟรกซ์ความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า . . . . .                                    | 16        |
| 4.2               | ความสัมพันธ์ระหว่างการส่งเปิดแบบเอสเบต้ากับความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า . . . . . | 18        |
| 4.3               | สมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า . . . . .                               | 21        |
| <b>บทที่ 5</b>    | <b>สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ</b>                                         | <b>25</b> |
| 5.1               | วัตถุประสงค์ของการวิจัย . . . . .                                             | 25        |
| 5.2               | สรุปผล . . . . .                                                              | 25        |
| 5.3               | อภิปรายผล . . . . .                                                           | 25        |
| 5.4               | ข้อเสนอแนะ . . . . .                                                          | 26        |
| <b>บรรณานุกรม</b> |                                                                               | <b>27</b> |
| <b>ภาคผนวก</b>    |                                                                               | <b>28</b> |
|                   | ก. ประวัติผู้วิจัย . . . . .                                                  | 29        |
|                   | ข. รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ . . . . .                                             | 30        |
|                   | ค. การเผยแพร่ผลงานวิจัย . . . . .                                             | 31        |

(จ)

## สารบัญตาราง

| ตารางที่                                                                         | หน้า |
|----------------------------------------------------------------------------------|------|
| 4.1 แสดงโคลเซอร์ของอินที่เรียของสับเซต $G$ และคอมพลิเมนต์ของสับเซต $G$ . . . . . | 17   |
| 4.2 แสดงโคลเซอร์ของอินที่เรียของสับเซต $A$ และคอมพลิเมนต์ของสับเซต $A$ . . . . . | 19   |
| 4.3 แสดงโคลเซอร์ของอินที่เรียของสับเซต $H$ และคอมพลิเมนต์ของสับเซต $H$ . . . . . | 20   |



(ซ)

## สารบัญรูป

| รูปที่                                                         | หน้า |
|----------------------------------------------------------------|------|
| 1.1 แสดงกรอบแนวคิดในการวิจัย . . . . .                         | 2    |
| 4.1 แสดง $A$ มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า . . . . . | 21   |

# บทที่ 1

## บทนำ

ฟังก์ชันหรือการส่ง (functions or mappings) เป็นหัวข้อหนึ่งที่สำคัญของ การศึกษาคณิตศาสตร์บริสุทธิ์แขนงทอพอโลยีและ การวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน และคุณลักษณะอย่างหนึ่งของฟังก์ชันชนิดพิเศษอย่างหนึ่ง ที่กล่าวถึงอยู่เสมอคือสมบัติจุดตรึง (fixed point property) เป็นลักษณะพิเศษของฟังก์ชันจำกัด (restriction function) ที่นักคณิตศาสตร์ได้ทำการศึกษากันมาอย่างต่อเนื่องโดยการแยกย่อยเป็นชนิดหรือแบบต่างๆตามลักษณะของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นการวิจัยเบื้องต้น (basic research) ที่มุ่งแสวงหาข้อเท็จจริงเกี่ยวกับคุณลักษณะของสมบัติของจุดตรึงของฟังก์ชันต่อเนื่องชนิดพิเศษ ที่เราสนใจในปริภูมิเชิงทอพอโลยี เพื่อทำความเข้าใจ เกี่ยวกับปัญหาวิจัยรวมถึงสาระสำคัญอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง ดังนั้นในบทนี้จะให้รายละเอียดที่สำคัญของที่มาและความสำคัญของปัญหาวิจัย วัตถุประสงค์ของการวิจัย ขอบเขตของการวิจัย และประโยชน์ของการวิจัยโดยมีเนื้อหาสาระสำคัญ ดังต่อไปนี้

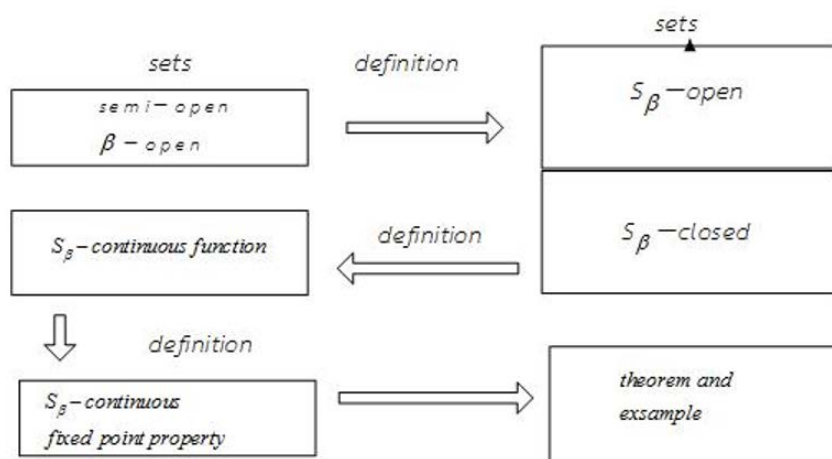
### 1.1 ที่มาและความสำคัญ

ปัจจุบันการคิดค้นหรือการพัฒนาทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆทางวิชาการด้าน คณิตศาสตร์นั้น นับว่ามีบทบาทสำคัญมากต่อการพัฒนาเทคโนโลยีสมัยใหม่ อันเป็นสิ่งจำเป็นและสำคัญอย่างยิ่งต่อการพัฒนา ประเทศ โดยเฉพาะทฤษฎีบทที่ได้จากการศึกษาปัญหาในทาง คณิตศาสตร์ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้หลากหลายสาขา อาทิ ฟิสิกส์ วิศวกรรมศาสตร์ เทคโนโลยี เศรษฐศาสตร์ เป็นต้น นักวิจัยด้านคณิตศาสตร์ได้การศึกษาเกี่ยวกับ ฟังก์ชันต่อเนื่องแบบต่างๆ สมบัติจุดตรึงของความต่อเนื่องแบบต่างๆ มาอย่าง สม่าเสมอ และสำหรับงานวิจัยเรื่องคุณลักษณะของสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ได้รับแรงบันดาลใจจากบทความทาง คณิตศาสตร์เรื่อง  $S_\beta$ -open sets and  $S_\beta$ -continuity in topological spaces. เขียนโดย A. B. Khalaf and N. H. Ahmed ซึ่งได้นิยาม เซตเปิดแบบเอสเบต้าและความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าพร้อมทั้ง ศึกษาสมบัติต่างๆ ของเซตและความต่อเนื่อง และเรื่อง  $\delta$ -fixed point property ซึ่ง F. Cammaroto and T.Noiri ได้ทำการศึกษาคุณลักษณะของสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเดลต้าไว้ ผู้วิจัยมีแนวคิดที่จะใช้ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการสร้างฟังก์ชัน ต่อเนื่องแบบเอสเบต้าเพื่อเป็นแนวทางกำหนดนิยามสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบ เอสเบต้า รวมทั้งศึกษาบางสมบัติของสมบัติจุดตรึงดังกล่าว เป็นการพัฒนาการเรียนการสอนวิชาทอพอโลยี รวมถึงการศึกษาต่อยอดการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น ของนักศึกษา และผู้สนใจทั่วไป ดังนั้นการวิจัยนี้จึงมีความสำคัญเป็นอย่างมากของการวิจัยบริสุทธิ์หรือการวิจัยพื้นฐานทางด้านคณิตศาสตร์ในระดับสากล

### 1.2 วัตถุประสงค์

โครงการวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ 2 ข้อคือ

- (1) กำหนดนิยามของสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า
- (2) ศึกษาสมบัติของสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าและพิสูจน์ทฤษฎีบทที่นำเสนอ



รูปที่ 1.1: แสดงกรอบแนวคิดในการวิจัย

### 1.3 ขอบเขตของการดำเนินการ

โครงการวิจัยนี้จะใช้ความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าในการสร้างบทนิยามของสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าศึกษาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการมีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ยกตัวอย่างที่เป็นเซตจำกัดประกอบบทนิยามและทฤษฎีบท

### 1.4 วิธีการดำเนินงาน

- (1) การศึกษาความรู้พื้นฐาน
- (2) การศึกษาสมบัติจุดตรึงและความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า
- (3) สร้างบทนิยามและศึกษาสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า
- (4) สร้างตัวอย่างประกอบบทนิยามที่น่าสนใจและ พิสูจน์ทฤษฎีบทที่น่าสนใจ
- (5) สรุปผลการวิจัย

### 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

สำหรับโครงการวิจัยนี้ผู้วิจัยได้กำหนดบทนิยามสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าพร้อมทั้งยังศึกษาสมบัติต่างๆของสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า อันจะทำให้เกิดประโยชน์ที่จะได้รับอย่างน้อย 4 ประการคือ

- (1) ได้สมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบใหม่ที่ใช้ความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า มาประกอบในการนิยาม
- (2) ได้ทฤษฎีบทสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าซึ่งสามารถนำไปใช้อ้างอิง ให้เกิดความก้าวหน้าทางวิชาการ
- (3) ได้องค์ความรู้ใหม่ที่จะนำไปตีพิมพ์เผยแพร่ในวารสารทางวิชาการอันจะนำไปสู่ความเข้มแข็งและความก้าวหน้าทางวิชาการของนักวิจัยด้านคณิตศาสตร์

- (4) ส่งเสริมความมั่นใจให้กับอาจารย์ที่สอนวิชาทางด้านคณิตศาสตร์ และเป็นแนวทางในการทำวิจัยให้นักวิจัยที่สนใจปัญหาเกี่ยวกับสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ส่งผลทำให้การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีคุณภาพเพิ่มขึ้น

## บทที่ 2

### ความรู้พื้นฐาน

สำหรับบทนี้จะนำเสนอรายละเอียดของความรู้พื้นฐาน ที่ได้จากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ที่นำไปใช้ในการศึกษาและอ้างอิงในบทที่ 3 และบทที่ 4 โดยจะกล่าวถึงบทนิยาม ทฤษฎีบท สำหรับบาง ทฤษฎีบท จะไม่แสดงการพิสูจน์ไว้ผู้สนใจสามารถศึกษาได้จาก เอกสารอ้างอิงที่ระบุต่อบทนิยาม หรือทฤษฎีบทและถ้าหากไม่ระบุไว้แสดงว่าเป็นความรู้พื้นฐานในหนังสือวิชาทอพอโลยีเบื้องต้นหรือ วิชาทอพอโลยีซึ่งสามารถ ศึกษาได้จาก สมพงษ์ ธรรมพงษ์ (2532) Dugundji (1966) และ Steen and Seebach (1978) บทนี้จึงมีรายละเอียดและเนื้อหาสาระสำคัญต่อไปนี้

#### 2.1 บทนิยามและทฤษฎีบทสำคัญ

**บทนิยาม 2.1.1** ให้  $X \neq \emptyset$  และ  $\tau$  เป็นเซตของสับเซตของ  $X$  เรียก  $\tau$  ว่าทอพอโลยี(topology) สำหรับ  $X$  ถ้า  $\tau$  มีสมบัติต่อไปนี้

- (1)  $\emptyset, X \in \tau$
- (2)  $\bigcap_{i=1}^n G_i \in \tau$  สำหรับแต่ละ  $G_i \in \tau$  เมื่อ  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- (3)  $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$  สำหรับแต่ละ  $\{G_i | i \in I\} \subseteq \tau$  เมื่อ  $I$  เป็นเซตดัชนี

เรียกสมาชิกใน  $\tau$  ว่าเซตเปิดใน  $X$  เรียกคู่อันดับ  $(X, \tau)$  ว่าปริภูมิเชิงทอพอโลยี (topological space) เรียกอินเตอร์เซกชันข้อ(2) ว่าอินเตอร์เซกชันจำกัด (finite intersection) เรียกยูเนียนข้อ(3) ว่า ยูเนียนเลือก (arbitrary union) และเรียกสับเซต  $F$  ใน  $X$  ว่าเซตปิดใน  $X$  ถ้าคอมพลีเมนต์ของเซต  $F$  เป็นเซตเปิดใน  $X$

**บทนิยาม 2.1.2** ให้  $X$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี  $A \subseteq X$  และ  $x \in X$

- (1) เรียก  $A$  ว่าเนบอร์ฮูด (neighbourhood) ของ  $x$  ถ้ามี  $G \in \tau$  ที่  $x \in G \subseteq A$  ใช้สัญลักษณ์  $\eta(x)$  แทนเซตของเนบอร์ฮูดทั้งหมดของ  $x$
  - (2) เรียก  $x$  ว่าสมาชิกอินทีเรีย (interior point) ของ  $A$  แทนด้วย  $x \in \text{int}(A)$  ถ้า  $A$  เป็นเนบอร์ฮูดของ  $x$  นั่นคือ  $\text{int}(A) = \{x \in A | A \text{ เป็นเนบอร์ฮูดของ } x\}$
  - (3) โคลเชอร์ (closure) ของ  $A$  เขียนแทนด้วย  $cl(A)$
- ซึ่งหมายถึง  $cl(A) = \{x \in X | V \cap A \neq \emptyset \text{ สำหรับทุกๆ เนบอร์ฮูด } V \text{ ของ } x\}$

**ทฤษฎีบท 2.1.1** ห้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี และ สำหรับ  $A, B, G \subseteq X$  จะได้ว่า

- (1) ถ้า  $G \in \tau$  แล้ว  $\text{int}(G) = G$
- (2) ถ้า  $A \subseteq B$  แล้ว  $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$
- (3)  $\text{int}(A) = \bigcup \{G | G \in \tau \text{ และ } G \subseteq A\}$
- (4)  $\text{int}(A) \subseteq A$
- (5)  $\text{int}(\emptyset) = \emptyset$
- (6)  $\text{int}(X) = X$
- (7)  $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$
- (8)  $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$
- (9)  $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) \subseteq \text{int}(A \cup B)$

**ทฤษฎีบท 2.1.2** ให้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี และ สำหรับ  $A, B, F \subseteq X$  จะได้ว่า

- (1)  $A \subseteq cl(A)$
- (2) ถ้า  $A \subseteq B$  แล้ว  $cl(A) \subseteq cl(B)$
- (3)  $A$  เป็นเซตปิดก็ต่อเมื่อ  $cl(A) = A$
- (4)  $cl(A) = \bigcap \{F \mid F \text{ เป็นเซตปิดใน } X \text{ ที่ } A \subseteq F\}$
- (5)  $cl(cl(A)) = cl(A)$
- (6)  $cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B)$
- (7)  $cl(A \cap B) \subseteq cl(A) \cap cl(B)$
- (8)  $cl(X - A) = X - int(A)$
- (9)  $X - cl(A) = int(X - A)$

**หมายเหตุ** สำหรับปริภูมิเชิงทอพอโลยี  $(X, \tau)$  ได้ว่า  $cl(\emptyset) = \emptyset$  และ  $cl(X) = X$

**บทนิยาม 2.1.3** ให้  $X$  และ  $Y$  เป็นเซต ความสัมพันธ์ (relations) จาก  $X$  ไป  $Y$  คือสับเซตของ  $X \times Y$  ถ้า  $r$  เป็นความสัมพันธ์แล้ว  $(x, y) \in r$  เขียนแทนด้วย  $xry$  อ่านว่า  $x$  สัมพันธ์กับ  $y$  ภายใต้  $r$

(1) สำหรับ  $X \neq \emptyset$  และ  $Y \neq \emptyset$  และ  $f$  เป็นความสัมพันธ์จาก  $X$  ไป  $Y$  เรียก  $f$  ว่าเป็นฟังก์ชัน (functions) จาก  $X$  ไป  $Y$  ถ้าสำหรับแต่ละ  $x \in X$  จะมีสมาชิก  $y \in Y$  เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่  $(x, y) \in f$  นั่นคือ ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชัน และ  $(x, y), (x, z) \in f$  แล้วจะได้ว่า  $y = z$   $f$  เป็นฟังก์ชันจาก  $X$  ไป  $Y$  เขียนแทนด้วย  $f : X \rightarrow Y$  และถ้า  $(x, y) \in f$  เรียก  $y$  ว่าเป็นค่าของ  $f$  ที่  $x$  ซึ่งแทน  $y$  ด้วย  $f(x)$

(2) โดเมน (domain) และ เรจัน (range) ของ  $f$  เขียนแทนด้วย  $D_f$  และ  $R_f$  ซึ่งหมายถึง  $D_f = \{x \in X \mid f(x) = y, \exists y \in Y\}$  และ  $R_f = \{y \in Y \mid f(x) = y, \exists x \in X\}$  ตามลำดับ

(3) สำหรับ  $A \subseteq X$  กำหนด  $f(A) = \{y \in Y \mid f(x) = y, \exists x \in A\}$

(4) เรียก  $f$  ว่าเป็นฟังก์ชันทั่วถึง (onto function) ก็ต่อเมื่อ  $R_f = Y$

(5) เรียก  $f$  ว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one to one function)

ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ  $x_1, x_2 \in X$  ซึ่งถ้า  $f(x_1) = f(x_2)$  แล้ว  $x_1 = x_2$

(6) เรียก  $f$  ว่าเป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function)

ก็ต่อเมื่อ  $f(x) = x$  สำหรับแต่ละ  $x \in X$

(7) สำหรับ  $A \subseteq X$  ฟังก์ชันจำกัดของ  $f$  บน  $A$  (restriction of  $f$  to  $A$ )

เขียนแทนด้วย  $f|_A$  กำหนดโดย  $f|_A(x) = f(x), \forall x \in A$  ซึ่งข้อความนี้สมมูลกับ  $f|_A = f \cap (A \times Y)$

และถ้า  $f : X \rightarrow Y$  เป็นฟังก์ชันจำกัดของบางฟังก์ชัน  $g : X^* \rightarrow Y$  เมื่อ  $X \subseteq X^*$  แล้วเรียก  $g$  ว่าเป็นฟังก์ชันขยายของ  $f$  (extension of  $f$ )

(8) อินเวอร์ส (inverse) ของฟังก์ชัน  $f$  เขียนแทนด้วย  $f^{-1}$  หมายถึง ความสัมพันธ์จาก  $Y$  ไป  $X$  โดยที่  $(y, x) \in f^{-1}$  ก็ต่อเมื่อ  $f(x) = y$

(9) สำหรับ  $B \subseteq Y$  กำหนด  $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

**บทนิยาม 2.1.4** ให้  $f : X \rightarrow Y$  และ  $g : Y \rightarrow Z$  ฟังก์ชันประกอบของ  $f$  กับ  $g$  (composition of  $f$  and  $g$ ) เขียนแทนด้วย  $g \circ f$  คือ ฟังก์ชันจาก  $X$  ไป  $Z$  กำหนดโดย  $(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in X$

**ทฤษฎีบท 2.1.3** ให้  $f : X \rightarrow Y$  และ  $A, B \subseteq X$  และ  $C, D \subseteq Y$  จะได้ว่า

- (1)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

- (2)  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
- (3)  $f(A - B) \supseteq f(A) - f(B)$
- (4) ถ้า  $A \subseteq B$  แล้ว  $f(A) \subseteq f(B)$
- (5)  $f(\cup_i A_i) = \cup_i f(A_i)$  เมื่อ  $\{A_i\}_i$  เป็นเซตของสับเซตของ  $X$
- (6)  $f(\cap_i A_i) \subseteq \cap_i f(A_i)$  เมื่อ  $\{A_i\}_i$  เป็นเซตของสับเซตของ  $X$
- (7)  $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
- (8)  $f^{-1}(C \cap D) \subseteq f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
- (9)  $f^{-1}(C - D) = f^{-1}(C) - f^{-1}(D)$  และเนื่องจาก  $f^{-1}(Y) = X$  จึงได้ว่า  $f^{-1}(Y - D) = X - f^{-1}(D)$
- (10) ถ้า  $C \subseteq D$  แล้ว  $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$
- (11)  $f^{-1}(\cup_i C_i) = \cup_i f^{-1}(C_i)$  เมื่อ  $\{C_i\}_i$  เป็นเซตของสับเซตของ  $Y$
- (12)  $f^{-1}(\cap_i C_i) \subseteq \cap_i f^{-1}(C_i)$  เมื่อ  $\{C_i\}_i$  เป็นเซตของสับเซตของ  $Y$
- (13)  $A \subseteq f^{-1}(f(A))$  และ  $C \supseteq f(f^{-1}(C))$
- (14) ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแล้ว  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  และ  $A = f^{-1}(f(A))$
- (15) ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันทั่วถึงแล้ว  $C = f(f^{-1}(C))$

**บทนิยาม 2.1.5** ให้  $(X, \tau)$  และ  $(Y, \sigma)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี และฟังก์ชัน  $f : X \rightarrow Y$

- (1) เรียก  $f$  ว่าต่อเนื่องที่  $x \in X$  ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ  $G \in \sigma$  ที่  $f(x) \in G$  จะมี  $H \in \tau$  ที่  $x \in H$  และ  $f(H) \subseteq G$  จะเรียก  $f$  ต่อเนื่องบน  $X$  ก็ต่อเมื่อ  $f$  ต่อเนื่องทุก  $x \in X$
- (2) เรียก  $f$  ว่าฟังก์ชันเปิด (หรือการส่งเปิด) บน  $X$  ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ  $G \in \tau$  ได้ว่า  $f(G) \in \sigma$
- (3) เรียก  $f$  ว่าฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเซไมบน  $X$  ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ  $G \in \sigma$  ได้ว่า  $f^{-1}(G) \in SO(X)$
- (4) เรียก  $X$  ว่ามีสมบัติจุดตรึง (fixed point property) เขียนแทนด้วย  $FPP$  ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละฟังก์ชันต่อเนื่อง  $f : X \rightarrow X$  จะมี  $x \in X$  ที่  $f(x) = x$

**หมายเหตุ**  $f$  ต่อเนื่องบน  $X$  ก็ต่อเมื่อ แต่ละ  $G \in \sigma$  ได้ว่า  $f^{-1}(G) \in \tau$

**ทฤษฎีบท 2.1.4** ให้  $(X, \tau)$  และ  $(Y, \sigma)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี และฟังก์ชัน  $f : X \rightarrow Y$  ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- (1)  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
- (2) อินเวอร์สอิมเมจของแต่ละเซตปิดใน  $Y$  เป็นเซตปิดใน  $X$
- (3) อินเวอร์สอิมเมจของแต่ละเซตที่เป็นสมาชิกของสับเบสใน  $Y$  เป็นเซตเปิดใน  $X$
- (4) สำหรับแต่ละ  $x \in X$  และ แต่ละเนเบอร์ฮูด  $W(f(x)) \in \sigma$  จะมีเนเบอร์ฮูด  $V(x) \in \tau$  ที่  $f(V(x)) \subseteq W(f(x))$
- (5)  $f(clA) \subseteq clf(A), \forall A \subseteq X$
- (6)  $cl(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(clB), \forall B \subseteq Y$

**ทฤษฎีบท 2.1.5** ให้  $(X, \tau)$  และ  $(Y, \sigma)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี และฟังก์ชัน  $f : X \rightarrow Y$  ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- (1)  $f$  เป็นฟังก์ชันเปิด(หรือการส่งเปิด)

$$(2) \text{int}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\text{int}(B)), \forall B \subseteq Y$$

$$(3) f(\text{int}(A)) \subseteq f(\text{int}(A)), \forall A \subseteq X$$

**บทนิยาม 2.1.6** ให้  $X$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี  $A \subseteq X$

(1) เรียก  $A$  ว่าเซตเปิดแบบแอลฟา ( $\alpha$ -open) ถ้า  $A \subseteq \text{int}(cl(\text{int}(A)))$  Thivagar (1991 : 55-63)

(2) เรียก  $A$  ว่าเซตเปิดแบบเซไม (semi-open) ถ้า  $A \subseteq cl(\text{int}(A))$  Levine (1963 : 36-41)

(3) เรียก  $A$  ว่าเซตเปิดแบบเบต้า ( $\beta$ -open) ถ้า  $A \subseteq cl(\text{int}(cl(A)))$  E-Moonsef, El-Deeb and Mahmoud (1983 : 70-90)

(4) เรียกเซตเปิดแบบเซไม  $A$  ว่าเซตเปิดแบบเอสเบต้า ( $S_\beta$ -open) ถ้าแต่ละ  $x \in A$  จะมีเซตปิดแบบเบต้า  $F \subseteq X$  ซึ่ง  $x \in F \subseteq A$  (E-Moonsef, El-Deeb and Mahmoud (1983 : 70-90) เรียก  $F$  ว่าเซตปิดแบบเบต้า ถ้าคอมพลิเมนต์ของ  $F$  เป็นเซตเปิดแบบเบต้า)

คอมพลิเมนต์ของเซตเปิดแบบเซไม (แอลฟา, เบต้า, เอสเบต้า) เรียกว่า เซตปิดแบบเซไม (แอลฟา, เบต้า, เอสเบต้า) ตามลำดับ ยูเนียนทั้งหมดของเซตเปิดแบบเซไม (แอลฟา, เบต้า) ใน  $X$  ที่บรรจุใน  $A$  เรียกว่า อินทีเรียแบบเซไม (แอลฟา, เบต้า) ของ  $A$  ตามลำดับ เขียนแทนด้วย  $sint(A)$

( $\alpha\text{int}(A), \beta\text{int}(A)$ ) ตามลำดับ อินเตอร์เซกชันทั้งหมดของเซตปิดแบบเซไม (แอลฟา, เบต้า) ใน  $X$  ที่  $A$  บรรจุอยู่ เรียกว่า โคลเซอร์แบบเซไม (แอลฟา, เบต้า) ของ  $A$  ตามลำดับ เขียนแทนด้วย  $scl(A)$  ( $\alpha cl(A), \beta cl(A)$ ) ตามลำดับ แฟมมิลีของสับเซตเปิดแบบเซไม (แอลฟา, เบต้า, เอสเบต้า) ทั้งหมดใน  $X$  เขียนแทนด้วย  $SO(X)$  ( $\alpha O(X), \beta O(X), S_\beta O(X)$ ) ตามลำดับ และแฟมมิลีของสับเซตปิดแบบเซไม (แอลฟา, เบต้า, เอสเบต้า) ทั้งหมดใน  $X$  เขียนแทนด้วย  $SC(X)$  ( $\alpha C(X), \beta C(X), S_\beta C(X)$ ) ตามลำดับ

**บทนิยาม 2.1.7** Khalaf and Ahmed (2013 : 319-335) ให้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี

(1) สำหรับ  $N \subseteq X$  เราเรียก  $N$  ว่าเนบอร์ฮูดแบบ เอสเบต้า ( $S_\beta$ -neighbourhood) ของสับเซต  $A$  ใน  $X$  ถ้ามีเซตเปิดแบบเอสเบต้า  $U \subseteq X$  ที่  $A \subseteq U \subseteq X$  เมื่อ  $A = \{x\}$  เรากล่าวว่า  $N$  เป็นเนบอร์ฮูดแบบเอสเบต้าของ  $x$  และเซตของเนบอร์ฮูดแบบเอสเบต้าของ  $x$  เขียนแทนด้วย  $S_\beta\eta(x)$

(2) สำหรับ  $A \subseteq X$  และ  $x \in X$  เราเรียก  $x$  ว่าจุดอินทีเรียแบบเอสเบต้า ( $S_\beta$ -interior point) ของเซต  $A$  ถ้ามีเซตเปิดแบบเอสเบต้า  $U \subseteq X$  ที่บรรจุ  $x$  ซึ่ง  $x \in U \subseteq A$  เขียนเซตของจุดอินทีเรียแบบเอสเบต้าทั้งหมดของ  $A$  ด้วยสัญลักษณ์  $S_\beta\text{int}(A)$  ดังนั้น  $x \in S_\beta\text{int}(A)$  แสดงว่า  $A \in S_\beta\eta(x)$  นั่นคือ  $S_\beta\text{int}(A) = \{x \in X | A \in S_\beta\eta(x)\}$

(3) สำหรับ  $A \subseteq X$  โคลเซอร์แบบเอสเบต้าของ  $A$  เขียนแทนด้วย  $S_\beta cl(A)$  หมายถึง  $S_\beta cl(A) = \{x \in X | N \cap A \neq \emptyset \text{ สำหรับทุก } N \in S_\beta\eta(x)\}$

**หมายเหตุ** จากบทนิยาม 2.1.7 พบว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1)  $S_\beta\text{int}(A)$  คือเซตเปิดแบบเอสเบต้าที่ใหญ่ที่สุดที่เป็นสับเซตของ  $A$

(2)  $S_\beta\text{int}(A) = \bigcup \{G | G \in S_\beta O(X) \text{ และ } G \subseteq A\}$

สามารถใช้บทนิยามแสดงการพิสูจน์ได้ดังนี้

**บทพิสูจน์** (1) ตอนแรกจะแสดงว่า  $S_\beta\text{int}(A)$  เป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้า

ให้  $x \in S_\beta\text{int}(A)$  จะได้ว่ามี  $G_x \in S_\beta O(X)$  ที่ทำให้  $x \in G_x \subseteq A$

เพราะฉะนั้น  $A$  เป็นเนบอร์ฮูดแบบเอสเบต้าของทุกสมาชิกใน  $G_x$

นั่นคือสำหรับทุก  $x \in S_\beta\text{int}(A)$  ได้ว่า  $x \in G_x \subseteq S_\beta\text{int}(A)$



เพราะฉะนั้น  $\bigcup_{x \in S_{\beta int}(A)} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in S_{\beta int}(A)} G_x \subseteq S_{\beta int}(A)$   
 เป็นผลทำให้  $\bigcup_{x \in S_{\beta int}(A)} G_x = S_{\beta int}(A)$   
 และเพราะว่ายูเนียนเลือกของเซตเปิดแบบเอสเบต้าเป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้า  
 ดังนั้น  $S_{\beta int}(A)$  เป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้า  
 จากบทนิยาม 2.1.7 (2) ทำให้ได้ว่า  $S_{\beta int}(A) \subseteq A$   
 ต่อไปจะแสดงว่า  $S_{\beta int}(A)$  เป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้าที่ใหญ่ที่สุดที่เป็นสับเซตของ  $A$   
 ให้  $G \in S_{\beta O}(X)$  ที่  $G \subseteq A$   
 เนื่องจาก  $G \subseteq A$  จึงได้ว่า  $A$  เป็นเนเบอร์ฮูดแบบเอสเบต้าของทุกสมาชิกใน  $G$   
 เพราะฉะนั้น  $G \subseteq S_{\beta int}(A)$   
 นั่นคือ  $S_{\beta int}(A)$  เป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้าที่ใหญ่ที่สุดที่เป็นสับเซตของ  $A$   
 (2)  $(\supseteq)$  เนื่องจาก  $\bigcup\{G \mid G \in S_{\beta O}(X) \text{ และ } G \subseteq A\}$  เป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้าที่เป็น  
 สับเซตของ  $A$  และเนื่องจาก  $S_{\beta int}(A)$  เป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้าที่ใหญ่ที่สุดที่เป็น  
 สับเซตของ  $A$  จึงได้ว่า  $\bigcup\{G \mid G \in S_{\beta O}(X) \text{ และ } G \subseteq A\} \subseteq S_{\beta int}(A)$   
 $(\subseteq)$  เนื่องจาก  $S_{\beta int}(A)$  เป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้าที่เป็นสับเซตของ  $A$   
 เพราะฉะนั้น  $S_{\beta int}(A) \subseteq \bigcup\{G \mid G \in S_{\beta O}(X) \text{ และ } G \subseteq A\}$  □

ต่อไปนี้เป็นสมบัติของอินทิเรียแบบเอสเบต้าและโคลเซอร์แบบเอสเบต้าซึ่งมี บางสมบัติ A. B. Khalaf กับ N. K. Ahmed ยังไม่แสดงการพิสูจน์ไว้ในบทความ  $S_{\beta}$ -open sets and  $S_{\beta}$ -continuity in topological spaces. ผู้วิจัยได้ดำเนินการแสดงวิธีพิสูจน์ดังต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 2.1.6** Khalaf and Ahmed (2013 : 319-335) ให้  $A$  และ  $B$  เป็นสับเซตของปริภูมิเชิงทอพอโลยี  $X$  จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1)  $A$  เซตเปิดแบบเอสเบต้า ก็ต่อเมื่อ  $A = S_{\beta int}(A)$
- (2)  $\emptyset = S_{\beta int}(\emptyset)$  และ  $X = S_{\beta int}(X)$
- (3)  $S_{\beta int}(A) \subseteq A$
- (4) ถ้า  $A \subseteq B$  แล้ว  $S_{\beta int}(A) \subseteq S_{\beta int}(B)$
- (5)  $S_{\beta int}(A) \cup S_{\beta int}(B) \subseteq S_{\beta int}(A \cup B)$
- (6)  $S_{\beta int}(A \cap B) \subseteq S_{\beta int}(A) \cap S_{\beta int}(B)$
- (7)  $S_{\beta int}(A \setminus B) \subseteq S_{\beta int}(A) \setminus S_{\beta int}(B)$

**บทพิสูจน์** (1)  $(\Rightarrow)$  ให้  $A \in S_{\beta int}(A)$  จะแสดงว่า  $A = S_{\beta int}(A)$

$(\subseteq)$  ให้  $x \in A$  เนื่องจาก  $A$  เป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้า

ทำให้ได้ว่า  $A$  เป็นเนเบอร์ฮูดแบบเอสเบต้าของ  $x$

โดยบทนิยาม 2.1.7 (2) ได้ว่า  $x \in S_{\beta int}(A)$

ดังนั้น  $A \subseteq S_{\beta int}(A)$

$(\supseteq)$  โดยบทนิยาม 2.1.7 (2) ได้ว่า  $S_{\beta int}(A) \subseteq A$

จาก  $(\subseteq)$  และ  $(\supseteq)$  จึงได้ว่า  $A = S_{\beta int}(A)$

$(\Leftarrow)$  ให้  $A = S_{\beta int}(A)$  และจากข้อสังเกต 2.3 (1)

ทำให้ได้ว่า  $S_{\beta int}(A)$  เป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้า

ดังนั้น  $A$  เป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้า

(2) เนื่องจาก  $\emptyset$  และ  $X$  เป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้า

โดยข้อ (1) ได้ว่า  $\emptyset = S_{\beta int}(\emptyset)$  และ  $X = S_{\beta int}(X)$

(3) เป็นจริงตามข้อสังเกต 2.1.3 (2)

(4) ให้  $x \in S_{\beta int}(A)$

โดยบทนิยาม 2.7 (2) มี  $G \in S_{\beta O}(X)$  ที่  $x \in G \subseteq A$  แต่เนื่องจาก  $A \subseteq B$

จึงได้ว่า  $x \in G \subseteq B$  เป็นผลทำให้  $x \in S_{\beta int}(B)$

ดังนั้น  $S_{\beta int}(A) \subseteq S_{\beta int}(B)$

(5) เนื่องจาก  $A \subseteq A \cup B$  และ  $B \subseteq A \cup B$

โดยข้อ (3) ได้ว่า  $S_{\beta int}(A) \subseteq S_{\beta int}(A \cup B)$  และ  $S_{\beta int}(B) \subseteq S_{\beta int}(A \cup B)$

ดังนั้น  $S_{\beta int}(A) \cup S_{\beta int}(B) \subseteq S_{\beta int}(A \cup B)$

(6) เป็นจริงตามสมบัติอินเตอร์เซกชันของเซตและประยุกต์ใช้ข้อ (4)

(7) ให้  $x \in S_{\beta int}(A \setminus B)$

ดังนั้นมี  $G \in S_{\beta O}(X)$  ที่  $x \in G \subseteq (A \setminus B)$

ได้ว่า  $x \in G \subseteq A$  และ  $x \in G \not\subseteq B$

ทำให้  $x \in S_{\beta int}A$  และ  $x \notin S_{\beta int}B$

จึงได้ว่า  $x \in (S_{\beta int}A \setminus S_{\beta int}B)$

นั่นคือ  $S_{\beta int}(A \setminus B) \subseteq S_{\beta int}A \setminus S_{\beta int}(B)$  □

**หมายเหตุ** จากบทนิยาม 2.1.7 (3) พบว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1)  $A \subseteq S_{\beta cl}(A)$  สำหรับทุก  $A \subseteq X$

(2) ถ้า  $A \subseteq B$  แล้ว  $S_{\beta cl}(A) \subseteq S_{\beta cl}(B)$

ซึ่งสามารถแสดงการพิสูจน์ได้ดังนี้

**บทพิสูจน์** (1) ให้  $x \in A$  และเนื่องจากแต่ละเนเบอร์ฮูดแบบเอสเบต้าของ  $x$  ย่อมบรรจุ  $x$

จึงได้ว่า  $N \cap A \neq \emptyset$  สำหรับทุก  $N \in S_{\beta \eta}(x)$  เป็นผลทำให้  $x \in S_{\beta cl}(A)$

ดังนั้น  $A \subseteq S_{\beta cl}(A)$

(2) ให้  $x \in S_{\beta cl}(A)$  ดังนั้น  $N \cap A \neq \emptyset$  สำหรับทุก  $N \in S_{\beta \eta}(x)$

แต่เนื่องจาก  $A \subseteq B$  ทำให้  $N \cap B \neq \emptyset$  สำหรับทุก  $N \in S_{\beta \eta}(x)$

จึงได้ว่า  $x \in S_{\beta cl}(B)$  ดังนั้น  $S_{\beta cl}(A) \subseteq S_{\beta cl}(B)$  □

**ทฤษฎีบท 2.1.7** Khalaf and Ahmed (2013 : 319-335) ให้  $F$  และ  $E$  เป็นสับเซตของปริภูมิเชิงทอพอโลยี  $X$  จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1)  $F$  เซตปิดแบบเอสเบต้า ก็ต่อเมื่อ  $F = S_{\beta cl}(F)$

(2)  $\emptyset = S_{\beta cl}(\emptyset)$  และ  $X = S_{\beta cl}(X)$

(3)  $S_{\beta cl}(F)$  เป็นเซตปิดแบบเอสเบต้าที่เล็กที่สุด ที่บรรจุ  $F$

(4)  $S_{\beta cl}(F) \cup S_{\beta cl}(E) \subseteq S_{\beta cl}(F \cup E)$

(5)  $S_{\beta cl}(F \cap E) \subseteq S_{\beta cl}(F) \cap S_{\beta cl}(E)$

(6)  $S_{\beta cl}(X \setminus F) \subseteq X \setminus S_{\beta int}(F)$  และ  $X \setminus S_{\beta cl}(F) \subseteq S_{\beta int}(X \setminus F)$

(7)  $S_{\beta cl}(F)$  คืออินเตอร์เซกชันทั้งหมดของเซตปิดแบบเอสเบต้า ที่มี  $F$  เป็นสับเซต

**บทพิสูจน์** (1)  $(\Rightarrow)$  ให้  $F \in S_{\beta C}(X)$

จะแสดงว่า  $F = S_{\beta cl}(F)$

$(\subseteq)$  โดยข้อสังเกต 2.1.4 (1) ได้ว่า  $F \subseteq S_{\beta cl}(F)$

( $\supseteq$ ) ให้  $x \in S_\beta cl(F)$

สมมติว่า  $x \notin F$  เพราะฉะนั้น  $x \in (X \setminus F)$  โดยที่  $(X \setminus F) \in S_\beta O(X)$

ทำให้  $(X \setminus F)$  เป็นเนเบอร์ฮูดแบบเอสเบต้าของ  $x$

ดังนั้น  $(X \setminus F) \cap F \neq \emptyset$  เกิดการขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น  $x \in F$  ดังนั้น  $S_\beta cl(F) \subseteq F$

จาก ( $\subseteq$ ) และ ( $\supseteq$ ) ได้ว่า  $F = S_\beta cl(F)$

( $\Leftarrow$ ) ให้  $F = S_\beta cl(F)$

จะแสดงว่า  $F$  เป็นเซตปิดแบบเอสเบต้า

ให้  $x \in (X \setminus F)$  โดยที่  $(X \setminus F) \in S_\beta O(X)$

ทำให้ได้ว่า  $x \notin F = S_\beta cl(F)$

ดังนั้นมี  $N \in S_\beta \eta(x)$  ซึ่งทำให้  $N \cap F = \emptyset$

เพราะฉะนั้นมี  $G_x \in S_\beta O(X)$  ซึ่งทำให้  $x \in G_x \subseteq N \subseteq (X \setminus F)$

ได้ว่า  $\{x\} \subseteq G_x \subseteq N \subseteq (X \setminus F)$  สำหรับทุก  $x \in (X \setminus F)$

ได้ว่า  $\bigcup_{x \in (X \setminus F)} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in (X \setminus F)} G_x \subseteq (X \setminus F)$

เป็นผลให้  $\bigcup_{x \in (X \setminus F)} G_x = (X \setminus F)$

แต่เนื่องจาก  $\bigcup_{x \in (X \setminus F)} G_x$  เป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้า

ดังนั้น  $F$  เป็นเซตปิดแบบเอสเบต้า

(2) เนื่องจาก  $\emptyset$  และ  $X$  เป็นเซตปิดแบบเอสเบต้า

โดยข้อ(1) ได้ว่า  $\emptyset = S_\beta cl(\emptyset)$  และ  $X = S_\beta cl(X)$

(3) ขั้นตอนแรกจะแสดงว่า  $S_\beta cl(F)$  เป็นเซตปิดแบบเอสเบต้า

ให้  $x \in (X \setminus S_\beta cl(F))$  โดยที่  $(X \setminus S_\beta cl(F))$  เป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้า

ทำให้ได้ว่า  $x \notin S_\beta cl(F)$

ดังนั้นมี  $N \in S_\beta \eta(x)$  ซึ่งทำให้  $N \cap F = \emptyset$

เพราะฉะนั้นมี  $G_x \in S_\beta O(X)$  ซึ่งทำให้  $x \in G_x$  และ  $G_x \cap F = \emptyset$

ได้ว่า  $x \in G_x$  และ  $F \subseteq (X \setminus G_x)$

โดยข้อสังเกต 2.4 (2) และทฤษฎีบท 2.6 (1) ได้ว่า  $x \in G_x$

และ  $S_\beta cl(F) \subseteq S_\beta cl(X \setminus G_x) = X \setminus G_x$

ได้ว่า  $x \in G_x \subseteq (X \setminus S_\beta cl(F))$  สำหรับทุก  $x \in (X \setminus S_\beta cl(F))$

ได้ว่า  $\{x\} \subseteq G_x \subseteq (X \setminus S_\beta cl(F))$  สำหรับทุก  $x \in (X \setminus S_\beta cl(F))$

ได้ว่า  $\bigcup_{x \in (X \setminus S_\beta cl(F))} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in (X \setminus S_\beta cl(F))} G_x \subseteq (X \setminus S_\beta cl(F))$

เป็นผลให้  $\bigcup_{x \in (X \setminus S_\beta cl(F))} G_x = (X \setminus S_\beta cl(F))$

แต่เนื่องจาก  $\bigcup_{x \in (X \setminus S_\beta cl(F))} G_x$  เป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้า

ดังนั้น  $S_\beta cl(F)$  เป็นเซตปิดแบบเอสเบต้า

ต่อไปจะแสดงว่า  $S_\beta cl(F)$  เป็นเซตปิดแบบเอสเบต้าที่เล็กที่สุดที่  $F \subseteq S_\beta cl(F)$

ให้  $E$  เป็นเซตปิดแบบเอสเบต้าที่มี  $F \subseteq E$

โดยข้อสังเกต 2.1.4 (2) และทฤษฎีบท 2.1.6 (1) ได้ว่า  $S_\beta cl(F) \subseteq S_\beta cl(E) = E$

(4) เนื่องจาก  $F \subseteq F \cup E$  และ  $E \subseteq F \cup E$

โดยข้อสังเกต 2.1.4 (3) ได้ว่า  $S_\beta cl(F) \subseteq S_\beta cl(F \cup E)$  และ  $S_\beta cl(E) \subseteq S_\beta cl(F \cup E)$

ดังนั้น  $S_\beta cl(F) \cup S_\beta cl(E) \subseteq S_\beta cl(F \cup E)$

(5) ให้  $x \in S_\beta cl(F \cap E)$

ดังนั้นสำหรับทุกๆ  $N \in S_{\beta\eta}(x)$  จะทำให้  $N \cap (F \cap E) \neq \emptyset$   
 ทำให้  $N \cap F \neq \emptyset$  และ  $N \cap E \neq \emptyset$   
 เป็นผลให้ได้ว่า  $x \in S_{\beta cl}(F)$  และ  $x \in S_{\beta cl}(E)$   
 เพราะฉะนั้น  $x \in (S_{\beta cl}(F) \cap S_{\beta cl}(E))$   
 นั่นคือ  $S_{\beta cl}(F \cap E) \subseteq S_{\beta cl}(F) \cap S_{\beta cl}(E)$   
 (6) จะแสดงว่า  $S_{\beta cl}(X \setminus F) \subseteq X \setminus S_{\beta int}(F)$   
 ให้  $x \in S_{\beta cl}(X \setminus F)$   
 จะได้ว่า  $N \cap (X \setminus F) \neq \emptyset$  สำหรับทุก  $N \in S_{\beta\eta}(x)$   
 ดังนั้นมี  $y \in N$  และ  $y \notin F$  สำหรับทุก  $N \in S_{\beta\eta}(x)$   
 แต่เนื่องจาก  $S_{\beta int}(F) \subseteq F$  จึงได้ว่า  $x \notin S_{\beta int}(F)$   
 ทำให้  $x \in X \setminus S_{\beta int}(F)$   
 นั่นคือ  $S_{\beta cl}(X \setminus F) \subseteq X \setminus S_{\beta int}(F)$   
 สำหรับการพิสูจน์  $X \setminus S_{\beta cl}(F) \subseteq S_{\beta int}(X \setminus F)$   
 สามารถแสดงการพิสูจน์ในทำนองเดียวกัน  
 (7) จะแสดงว่า  $S_{\beta cl}(F) = \bigcap \{E | E \text{ เป็นเซตปิดแบบเอสเบต้าและ } F \subseteq E\}$   
 เนื่องจากอินเตอร์เซกชันเล็กของเซตปิดแบบเอสเบต้า ยังคงเป็นเซตปิดแบบเอสเบต้า  
 ดังนั้น  $\bigcap \{E | E \text{ เป็นเซตปิดแบบเอสเบต้า และ } F \subseteq E\}$  เป็นเซตปิดแบบเอสเบต้า  
 และ  $F \subseteq \bigcap \{E | E \text{ เป็นเซตปิดแบบเอสเบต้าและ } F \subseteq E\}$   
 โดยทฤษฎีบท 2.1.6 (3) ได้ว่า  $S_{\beta cl}(F) \subseteq \bigcap \{E | E \text{ เป็นเซตปิดแบบเอสเบต้าและ } F \subseteq E\}$   
 เนื่องจาก  $F \subseteq S_{\beta cl}(F)$  และ  $S_{\beta cl}(F)$  เป็นเซตปิดแบบเอสเบต้า  
 ได้ว่า  $\bigcap \{E | E \text{ เป็นเซตปิดแบบเอสเบต้าและ } F \subseteq E\} \subseteq S_{\beta cl}(F)$   
 ดังนั้น  $S_{\beta cl}(F) = \bigcap \{E | E \text{ เป็นเซตปิดแบบเอสเบต้าและ } F \subseteq E\}$  □

**บทนิยาม 2.1.8** Mashhoor, El-Monsef and El-deeb (1982 : 47-53) ให้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี จะกล่าวว่า  $X$  เป็นปริภูมิโลคอลลีอินดิสครีต (locally indiscrete space) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละเซตเปิด  $U$  ใน  $X$  ได้ว่า  $U$  เซตปิดใน  $X$

**ทฤษฎีบท 2.1.8** Khalaf and Ahmed (2013 : 319-335) ให้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) ถ้า  $G \in \tau$  แล้ว  $G \in SO(X)$
- (2) ถ้า  $X$  เป็นปริภูมิโลคอลลีอินดิสครีตและ  $G \in SO(X)$  แล้ว  $G \in S_{\beta}O(X)$
- (3) ถ้า  $X$  เป็นปริภูมิโลคอลลีอินดิสครีตและ  $G \in O(X)$  แล้ว  $G \in S_{\beta}O(X)$

**ทฤษฎีบท 2.1.9** Khalaf and Ahmed (2013 : 319-335) ให้  $(X, \tau)$  และ  $(Y, \sigma)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี และฟังก์ชัน  $f : X \rightarrow Y$  จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- (1)  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า
- (2) สำหรับแต่ละ  $B \in O(Y)$  ได้ว่า  $f^{-1}(B) \in S_{\beta}O(X)$
- (3) สำหรับแต่ละ  $B \in C(Y)$  ได้ว่า  $f^{-1}(B) \in S_{\beta}C(X)$
- (4) สำหรับแต่ละ  $A \subseteq X$  ได้ว่า  $f(S_{\beta cl}(A)) \subseteq cl f(A)$
- (5) สำหรับแต่ละ  $A \subseteq X$  ได้ว่า  $int f(A) \subseteq f(S_{\beta int}(A))$
- (6) สำหรับแต่ละ  $B \subseteq Y$  ได้ว่า  $S_{\beta cl} f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(cl B)$

(7) สำหรับแต่ละ  $B \subseteq Y$  ได้ว่า  $f^{-1}(int B) \subseteq S_\beta int f^{-1}(B)$

**ทฤษฎีบท 2.1.10** Khalaf and Ahmed (2013 : 319-335) ให้  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง (onto) จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- (1)  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า
- (2) สำหรับแต่ละ  $B \subseteq Y$  ได้ว่า  $f(int(cl f^{-1}(U))) \subseteq f^{-1}(cl B)$  และ  $f^{-1}(cl B) = \bigcap_{i \in I} V_i$  ซึ่ง  $V_i \in \beta O(X)$ .
- (3) สำหรับแต่ละ  $B \subseteq Y$  ได้ว่า  $f^{-1}(int B) \subseteq cl int f^{-1}(B)$  และ  $f^{-1}(int B) = \bigcup_{i \in I} F_i$  ซึ่ง  $F_i \in \beta C(X)$ .
- (4) สำหรับแต่ละ  $A \subseteq X$  ได้ว่า  $f(int cl f(A)) \subseteq cl f(A)$  และ  $f^{-1}(cl f(A)) = \bigcap_{i \in I} V_i$  ซึ่ง  $V_i \in \beta O(X)$

**ทฤษฎีบท 2.1.11** Khalaf and Ahmed (2013 : 319-335) ให้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี ซึ่ง  $A \subseteq Y \subseteq X$  และ  $A \in S_\beta O(X)$   
ถ้า  $Y$  เป็นเซตเปิดแบบแอลฟาแล้ว  $A \in S_\beta O(Y)$

**บทนิยาม 2.1.9** Khalaf and Ahmed (2013 : 319-335) ให้  $(X, \tau)$  และ  $(Y, \sigma)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี และฟังก์ชัน  $f : X \rightarrow Y$   
จะกล่าวว่า  $f$  ต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ( $S_\beta$ -continuous) ที่  $x \in X$  ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละเซตเปิด  $V$  ใน  $Y$  ที่  $f(x) \in V$  จะมีเซตเปิดแบบเอสเบต้า  $U$  ใน  $X$  ที่  $x \in U$  และ  $f(U) \subseteq V$   
จะเรียก  $f$  ต่อเนื่องแบบเอสเบต้าบน  $X$  ก็ต่อเมื่อ  $f$  ต่อเนื่องทุก  $x \in X$

**บทนิยาม 2.1.10** Levine (1963 : 36-41) ให้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี และ  $A \subseteq X$  จะเรียก  $A$  ว่ารีแทรกความต่อเนื่องแบบเซไม (semi-continuous retract) ของ  $X$  ถ้า มีฟังก์ชันความต่อเนื่องแบบเซไม  $f : X \rightarrow A$  ซึ่ง  $f|_A$  เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บน  $A$  นั่นคือ  $f(x) = x, \forall x \in A$  และเรียก  $f$  ว่ารีแทรกซ์ความต่อเนื่องแบบเซไม (semi-continuous retraction)

**ทฤษฎีบท 2.1.12** Khalaf and Ahmed (2013 : 319-335) ให้  $(X, \tau)$  และ  $(Y, \sigma)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี และฟังก์ชัน  $f : X \rightarrow Y$   
จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- (1)  $f$  ต่อเนื่องแบบเอสเบต้าบน  $X$
- (2)  $f^{-1}(V)$  เป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้าใน  $X$  สำหรับทุกๆ เซตเปิด  $V$  ใน  $Y$
- (3)  $f^{-1}(F)$  เป็นเซตปิดแบบเอสเบต้าใน  $X$  สำหรับทุกๆ เซตปิด  $F$  ใน  $Y$
- (4)  $f(S_\beta cl(A)) \subseteq f(S_\beta int(A))$  สำหรับทุกๆ  $A \subseteq X$
- (5)  $int f(A) \subseteq f(A)$  สำหรับทุกๆ  $A \subseteq X$
- (6)  $S_\beta cl f^{-1}(B) \subseteq f^{-1} cl(B)$  สำหรับทุกๆ  $B \subseteq Y$
- (7)  $f^{-1}(int(B)) \subseteq S_\beta int(f^{-1}(B))$  สำหรับทุกๆ  $B \subseteq Y$

**หมายเหตุ** Khalaf and Ahmed (2013 : 319-335) พบว่า ทุกๆ ฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเซไม

## บทที่ 3

### การดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยนี้เป็นการศึกษาคุณลักษณะของสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าซึ่งต้องสร้างบทนิยามจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าและศึกษาคุณสมบัติของจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ดังกล่าวโดยมีระเบียบวิธีดำเนินการวิจัยตามหัวข้อดังนี้ ศึกษาความรู้พื้นฐาน ศึกษาเซตเปิดแบบเอสเบต้า และความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า สร้างบทนิยามและศึกษาสมบัติของจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า สร้างตัวอย่างประกอบบทนิยามที่น่าเสนอและ พิสูจน์ทฤษฎีบทที่น่าเสนอ และหัวข้อสุดท้ายเป็นสรุปผลการวิจัย

#### 3.1 การศึกษาความรู้พื้นฐาน

ผู้วิจัยดำเนินการศึกษาความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยอันได้แก่ บทนิยาม ทฤษฎีบท ของเซตเปิด เซตปิด เนเบอร์ฮูด ความต่อเนื่อง และจุดตรึงความต่อเนื่อง ซึ่งศึกษาจากตำราทอพอโลยีทั่วไป ศึกษาเซตเปิดแบบเอสเบต้า และความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า จากบทความวิจัยของ Khalaf and Ahmed (2013 : 319-335) และ Cammaroto and Noiri (1990 : 45-50) เพื่อเป็นแนวทางการศึกษาจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

#### 3.2 การศึกษาความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าและสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

ในการศึกษาความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าผู้ดำเนินการวิจัยศึกษาจากบทความวิจัยเรื่อง  $S_\beta$ -open sets and  $S_\beta$ -continuity in topological spaces ของ A. B. Khalaf และ N. K. Ahmed สำหรับสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบตานั้นผู้ดำเนินการวิจัยศึกษาจากบทความวิจัยเรื่อง On the  $\delta$ -continuous fixed point property ของ F. Cammaroto และ T. Noiri อีกทั้งยังศึกษาแนวคิดการนิยาม Strongly  $\theta$ -semi-continuous fixed point property จากบทความวิจัยเรื่อง On strongly  $\theta$ -semi-continuous function ของ N. Puturong

#### 3.3 สร้างบทนิยามรีแทรกชันความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าและบทนิยามสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

ผู้วิจัยกำหนดบทนิยามเซตรีแทรกชันความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าดังนี้  
**บทนิยาม** ให้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีและ  $A \subseteq X$  จะกล่าวว่า  $A$  เป็นรีแทรกชันความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าของ  $X$  ถ้ามีฟังก์ชันความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า  $f : X \rightarrow A$  ซึ่ง  $f$  เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บน  $A$  นั่นคือ  $f(x) = x, \forall x \in A$  และเราเรียก  $f$  ว่า รีแทรกชันความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า( $S_\beta$ -continuous retraction)

ผู้วิจัยกำหนดบทนิยามจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าดังนี้  
**บทนิยาม** ให้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี จะกล่าวว่า ปริภูมิ  $X$  มี สมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ( $S_\beta$ -continuous fixed point property) ถ้าแต่ละฟังก์ชัน  $f : X \rightarrow X$  ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า จะมี  $x \in X$  ซึ่ง  $f(x) = x$

$X$  มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า เขียนแทนด้วย  $X$  มี  $S_{\beta}cFPP$

สำหรับการศึกษาสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ผู้วิจัยสร้างทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าดังนี้

**ทฤษฎีบท** ให้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี และ  $A$  เป็นเซตเปิดหรือไม่ก็เป็นเซตหนาแน่นใน  $X$  ถ้า  $X$  มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ( $S_{\beta}cFPP$ ) และ  $A$  เป็นเซตรีแทรกความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าแล้ว  $A$  มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ( $S_{\beta}cFPP$ )

**ทฤษฎีบท** ให้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเรกูลาร์และโลคัลลีอินดิสครีต (regular and locally indiscrete space) ซึ่งมีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ( $S_{\beta}cFPP$ ) ถ้า  $\sigma$  เป็นทอพอโลยีสำหรับ  $X$  ที่เข้มกว่า (stronger)  $\tau$  และ  $clG^{(\tau)} = clG^{(\sigma)}$  สำหรับทุกเซตเปิด  $G$  ใน  $(X, \sigma)$  แล้ว  $(X, \sigma)$  มีสมบัติจุดตรึง ( $FPP$ )

### 3.4 การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างรีแทรกซ์ความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าและสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

จากการศึกษารีแทรกซ์ความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าและสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าพบว่า สำหรับ  $(X, \tau)$  ที่เป็นปริภูมิเรกูลาร์ซึ่งมีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า และ  $A$  เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดใน  $X$  ถ้า  $A$  เป็นเซตรีแทรกความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าของ  $X$  แล้ว  $A$  มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ซึ่งผู้วิจัยแสดงรายละเอียดการพิสูจน์ไว้ในบทที่ 4

### 3.5 การสร้างตัวอย่างประกอบบทนิยามที่นำเสนอและพิสูจน์ทฤษฎีบท

ผู้วิจัยดำเนินการสร้างตัวอย่างที่สอดคล้องกับบทนิยามและไม่สอดคล้องกับบทนิยามดังนี้  
ตัวอย่าง ให้  $X = \{a, b, c, d\}$

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\} \text{ เป็นทอพอโลยีบน } X$$

มีฟังก์ชันบน  $X$  ที่เป็นการต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ได้แก่  $f_i : X \rightarrow X$  สำหรับ  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  โดยนิยามดังนี้

$f_0$  เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์

$$f_1(a) = b, f_1(b) = a, f_1(c) = c, \text{ และ } f_1(d) = d$$

$$f_2(a) = a, f_2(b) = c, f_2(c) = b, \text{ และ } f_2(d) = d$$

$$f_3(a) = a, f_3(b) = b, f_3(c) = d, \text{ และ } f_3(d) = c$$

$$f_4(a) = a, f_4(b) = c, f_4(c) = b, \text{ และ } f_4(d) = d \text{ เป็นต้น}$$

ซึ่งฟังก์ชันเหล่านี้ต่างก็ทำให้  $X$  มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

จากบทนิยามสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า การที่  $X$  ไม่มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าหมายถึงข้อความต่อไปนี้

สำหรับปริภูมิเชิงทอพอโลยี  $(X, \tau)$  จะกล่าวว่า  $X$  ไม่มี สมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า (no  $S_{\beta}$ -continuous fixed point property) ถ้ามีฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า  $f : X \rightarrow X$  ซึ่ง  $f(x) \neq x$  สำหรับทุกๆ  $x \in X$  เขียนแทนด้วย  $X$  ไม่มี  $S_{\beta}cFPP$  มีตัวอย่างที่  $X$  ไม่มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

ตัวอย่าง ให้  $X = \{p, q, r\}$ ,  $\sigma = \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}X\}$  เป็นทอพอโลยีบน  $X$

พิจารณา  $f : X \rightarrow X$  เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย  $f(p) = q$ ,  $f(r) = q$ , และ  $f(q) = r$   
จะพบว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าและ  $X$  ไม่มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

### 3.6 สรุปผลการวิจัย

เมื่อดำเนินการตามขั้นตอนข้างต้นจึงได้ผลการวิจัยดังต่อไปนี้ คือสำหรับปริภูมิเชิงทอพอโลยี  $(X, \tau)$  ที่เป็นปริภูมิเรกูลาร์และโลคัลลีอินดิสครีต และมีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ถ้า  $\sigma$  เป็นทอพอโลยีสำหรับ  $X$  ที่เข้มกว่า (stronger)  $\tau$  และ  $clG^{(\tau)} = clG^{(\sigma)}$  สำหรับทุกเซตเปิด  $G$  ใน  $(X, \sigma)$  แล้ว  $(X, \sigma)$  มีสมบัติจุดตรึง



## บทที่ 4

### ผลดำเนินการวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงผลลัพธ์ของงานวิจัยนี้ซึ่งประกอบด้วย บทนิยามสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ตัวอย่างที่สอดคล้องกับ บทนิยาม ตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่าการมีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ไม่เกี่ยวข้องกับการมีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบอื่นๆ ซึ่งเริ่มต้นด้วยรีแทรกชันความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ความสัมพันธ์ระหว่างการส่เปิดแบบเอสเบต้ากับความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า และตอนท้าย เป็นทฤษฎีบทสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ตามลำดับดังต่อไปนี้

#### 4.1 รีแทรกชันความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

**บทนิยาม 4.1.1** ให้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีและ  $A \subseteq X$  จะกล่าวว่า  $A$  เป็นรีแทรกชันความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าของ  $X$  ถ้ามีฟังก์ชันความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า  $f : X \rightarrow A$  ซึ่ง  $f$  เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บน  $A$  นั่นคือ  $f(x) = x, \forall x \in A$  และเราเรียก  $f$  ว่า รีแทรกชันความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ( $S_\beta$ -continuous retraction)

**ตัวอย่าง 4.1.1** ให้  $X = \{a, b, c, d\}$

$$A = \{a, b, c\}$$

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\} \text{ เป็นทอพอโลยีบน } X$$

กำหนดฟังก์ชัน  $f : X \rightarrow X$  โดยที่

$$f(a) = a$$

$$f(b) = b \text{ และ}$$

$$f(c) = f(d) = c$$

จงแสดงว่า  $f$  เป็นรีแทรกชันความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าบน  $X$

**วิธีทำ** ตอนแรกจะต้องแสดงว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

จากนั้นแสดงว่า  $f : X \rightarrow A$  เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บน  $A$

พิจารณาปริภูมิ  $X$  และให้  $G$  เป็นสับเซตของ  $X$

ตารางที่ 4.1: แสดงโคลเซอ์ของอินที่เรียของสับเซต  $G$  และคอมพลิเมนต์ของสับเซต  $G$

| $G$           | $int(G)$      | $cl(int(G))$  | $cl(G)$       | $int(cl(G))$ | $cl(int(cl(G)))$ | $X \setminus G$ |
|---------------|---------------|---------------|---------------|--------------|------------------|-----------------|
| $\emptyset$   | $\emptyset$   | $\emptyset$   | $\emptyset$   | $\emptyset$  | $\emptyset$      | $X$             |
| $X$           | $X$           | $X$           | $X$           | $X$          | $X$              | $\emptyset$     |
| $\{a\}$       | $\{a\}$       | $\{a, c, d\}$ | $\{a, c, d\}$ | $\{a\}$      | $\{a, c, d\}$    | $\{b, c, d\}$   |
| $\{b\}$       | $\{b\}$       | $\{b, c, d\}$ | $\{b, c, d\}$ | $\{b\}$      | $\{b, c, d\}$    | $\{a, c, d\}$   |
| $\{c\}$       | $\emptyset$   | $\emptyset$   | $\{c, d\}$    | $\emptyset$  | $\emptyset$      | $\{a, b, d\}$   |
| $\{d\}$       | $\emptyset$   | $\emptyset$   | $\{c, d\}$    | $\emptyset$  | $\emptyset$      | $\{a, b, c\}$   |
| $\{a, b\}$    | $\{a, b\}$    | $X$           | $X$           | $X$          | $X$              | $\{c, d\}$      |
| $\{a, c\}$    | $\{a\}$       | $\{a, c, d\}$ | $\{a, c, d\}$ | $\{a\}$      | $\{a, c, d\}$    | $\{b, d\}$      |
| $\{a, d\}$    | $\{a\}$       | $\{a, c, d\}$ | $\{a, c, d\}$ | $\{a\}$      | $\{a, c, d\}$    | $\{b, c\}$      |
| $\{b, c\}$    | $\{b\}$       | $\{b, c, d\}$ | $\{b, c, d\}$ | $\{b\}$      | $\{b, c, d\}$    | $\{a, d\}$      |
| $\{b, d\}$    | $\{b\}$       | $\{b, c, d\}$ | $\{b, c, d\}$ | $\{b\}$      | $\{b, c, d\}$    | $\{a, c\}$      |
| $\{c, d\}$    | $\emptyset$   | $\emptyset$   | $\{c, d\}$    | $\emptyset$  | $\emptyset$      | $\{a, b\}$      |
| $\{a, b, c\}$ | $\{a, b, c\}$ | $X$           | $X$           | $X$          | $X$              | $\{d\}$         |
| $\{a, b, d\}$ | $\{a, b\}$    | $X$           | $X$           | $X$          | $X$              | $\{c\}$         |
| $\{a, c, d\}$ | $\{a\}$       | $\{a, c, d\}$ | $\{a, c, d\}$ | $\{a\}$      | $\{a, c, d\}$    | $\{b\}$         |
| $\{b, c, d\}$ | $\{b\}$       | $\{b, c, d\}$ | $\{b, c, d\}$ | $\{b\}$      | $\{b, c, d\}$    | $\{a\}$         |

ทำให้ได้ว่า  $SO(X) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \}$   
 $= \beta O(X)$

เป็นผลให้  $\beta C(X) = \{X, \emptyset, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{d\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}\}$

ดังนั้น  $S_\beta O(X) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$

จากการนิยาม  $f$  เป็นผลทำให้

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in S_\beta O(X)$$

$$f^{-1}(\{a\}) = \{a\} \in S_\beta O(X)$$

$$f^{-1}(\{b\}) = \{b\} \in S_\beta O(X)$$

$$f^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\} \in S_\beta O(X)$$

$$\text{และ } f^{-1}(X) = X \in S_\beta O(X)$$

เนื่องจาก  $f(a) = a$ ,  $f(b) = b$  และ  $f(c) = c$

พบว่า  $f : X \rightarrow A$  เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บน  $A$  และ  $f : X \rightarrow X$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้าบน  $X$  โดยนิยามของรีแทรกชันความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า จึงได้ว่า  $f$  เป็นรีแทรกชันความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า หรือสับเซต  $A$  เป็นรีแทรกชันความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าของ  $X$   $\square$

**หมายเหตุ** จากตัวอย่าง 4.1.1 พบว่าสำหรับฟังก์ชันเอกลักษณ์  $i : X \rightarrow X$  ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้าจะเป็นรีแทรกชันความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าเสมอ

**ทฤษฎีบท 4.1.2** Khalaf and Ahmed (2013 : 319-335) ถ้าฟังก์ชัน  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า และ  $A \subseteq X$  ที่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดแล้วฟังก์ชันจำกัด  $f|_A : A \rightarrow Y$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

**บทพิสูจน์** ให้  $B$  เป็นเซตเปิดใน  $Y$  ตอนแรกจะแสดงว่า  $f^{-1}(B) \in S_\beta O(X)$

ถ้า  $f^{-1}(B) = \emptyset$  จะได้ว่า  $f^{-1}(B)$  เป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้าใน  $X$

ถ้า  $f^{-1}(B) \neq \emptyset$  จะได้ว่ามี  $x \in X$  ที่  $x \in f^{-1}(B)$

เป็นผลทำให้  $f(x) \in f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

เนื่องจาก  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

ดังนั้นมีเซตเปิดแบบเอสเบต้า  $G \subseteq X$  ซึ่งบรรจุ  $x$  ที่  $f(G) \subseteq B$

ดังนั้น  $x \in G \subseteq f^{-1}(f(G)) \subseteq f^{-1}(B)$

เป็นผลให้  $\cup_{x \in f^{-1}(B)} \{x\} \subseteq \cup_{x \in f^{-1}(B)} G \subseteq \cup_{x \in f^{-1}(B)} f^{-1}(B)$ ,  $\forall x \in f^{-1}(B)$

ทำให้  $\cup_{x \in f^{-1}(B)} G = f^{-1}(B)$  เป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้าใน  $X$

เนื่องจาก  $A$  เป็นเซตเปิดซึ่งทำให้  $A$  เป็นเซตเปิดแบบแอลฟา

โดยทฤษฎีบท 2.11 ทำให้  $f^{-1}(B) \cap A = (f|_A)^{-1}(B) \in S_\beta O(A)$

ดังนั้น  $f|_A$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า □

เมื่อพิจารณาการนิยามฟังก์ชันจำกัดในบทนิยาม 2.1.3 และจากทฤษฎีบท 4.1.1 จะพบว่า  $A$  เป็นรีแทรกความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าของ  $X$  และใช้ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า กับความต่อเนื่องแบบเซไม จะได้บทแทรกต่อไปนี้

**บทแทรก 4.1.3** ให้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี  $A \subseteq X$  ที่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด ถ้า  $A$  เป็นรีแทรกความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าของ  $X$  แล้ว  $A$  เป็นรีแทรกความต่อเนื่องแบบเซไมของ  $X$

**บทพิสูจน์** โดยทฤษฎีบท 4.1.1 และ ข้อสังเกต 2.1.5

จะได้ว่า  $A$  เป็นรีแทรกความต่อเนื่องแบบเซไมของ  $X$  □

ในหัวข้อต่อไปนี้เป็น การนำเสนอความสัมพันธ์ของฟังก์ชันสองฟังก์ชันซึ่งทั้งสองฟังก์ชันนี้ต่างก็นำเซตเปิดแบบเอสเบต้ามาประกอบในการนิยาม

## 4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างการส่งเปิดแบบเอสเบต้ากับความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

การส่งเปิดแบบเอสเบต้ากับความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าไม่มี ความเกี่ยวพันกันหรือเป็นอิสระต่อกัน นั่นคือมีบางฟังก์ชันเป็น ส่งเปิดแบบเอสเบต้าแต่ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ดังตัวอย่าง 4.1.1 เพราะว่า  $f^{-1}(\{c\}) = \{c, d\} \notin S_\beta O(X)$  โดยทฤษฎีบท 2.1.3 ได้ว่า ไม่ต่อเนื่องแบบเอสเบต้าบน  $X$  และมีบางฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า แต่ไม่เป็นการส่งเปิดแบบเอสเบต้า ดังตัวอย่าง 4.2.1 ต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 4.2.1** ให้  $Y = \{p, q, r\}$ ,  $\sigma = \{\emptyset, \{r\}, Y\}$  เป็นทอพอโลยีบน  $Y$  สำหรับ  $X$  และ  $\tau$  เช่นเดียวกับตัวอย่าง 4.1.1 และ  $f : X \rightarrow Y$  เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย  $f(a) = f(d) = r$ ,  $f(b) = p$  และ  $f(c) = q$  จงแสดงว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า แต่ไม่เป็นการส่งเปิดแบบเอสเบต้า

**วิธีทำ** พิจารณาปริภูมิ  $Y$  และให้  $A$  เป็นสับเซตของ  $Y$

ตารางที่ 4.2: แสดงโคลเซอรของอินทีเรียของสับเซต  $A$  และคอมพลิเมนต์ของสับเซต  $A$

| $A$         | $int(A)$    | $cl(int(A))$ | $cl(A)$     | $int(cl(A))$ | $cl(int(cl(A)))$ | $Y \setminus A$ |
|-------------|-------------|--------------|-------------|--------------|------------------|-----------------|
| $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$  | $\emptyset$ | $\emptyset$  | $\emptyset$      | $X$             |
| $Y$         | $Y$         | $Y$          | $Y$         | $Y$          | $Y$              | $\emptyset$     |
| $\{p\}$     | $\emptyset$ | $\emptyset$  | $\{p, q\}$  | $\emptyset$  | $\emptyset$      | $\{q, r\}$      |
| $\{q\}$     | $\emptyset$ | $\emptyset$  | $\{p, q\}$  | $\emptyset$  | $\emptyset$      | $\{p, r\}$      |
| $\{r\}$     | $\{r\}$     | $Y$          | $Y$         | $Y$          | $Y$              | $\{p, q\}$      |
| $\{p, q\}$  | $\emptyset$ | $\emptyset$  | $\{p, q\}$  | $\emptyset$  | $\emptyset$      | $\{r\}$         |
| $\{p, r\}$  | $\{r\}$     | $Y$          | $Y$         | $Y$          | $Y$              | $\{q\}$         |
| $\{q, r\}$  | $\{r\}$     | $Y$          | $Y$         | $Y$          | $Y$              | $\{p\}$         |

ได้ว่า

$$SO(Y) = \{\emptyset, Y, \{r\}, \{p, r\}, \{q, r\}\} = \beta O(Y)$$

$$\beta C(Y) = \{Y, \emptyset, \{p, q\}, \{q\}, \{p\}\}$$

$$\text{ดังนั้น } S_\beta O(Y) = \{\emptyset, Y\}$$

จากการนิยาม  $f$  จะได้ว่า

$$f(\emptyset) = \emptyset, f(a) = r, f(b) = p, f(c) = q, f(d) = r \text{ และ } f(X) = Y$$

$$\text{พบว่า } f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in S_\beta O(X)$$

$$f^{-1}(\{r\}) = \{a, d\} \in S_\beta O(X)$$

$$\text{และ } f^{-1}(Y) = X \in S_\beta O(X)$$

โดยทฤษฎีบท 2.1.3 จึงได้ว่า  $f$  ต่อเนื่องแบบเอสเบต้าบน  $X$

แต่มี  $\{a, b\} \in S_\beta O(X)$  ซึ่ง  $f(\{a, b\}) = \{p, r\} \notin \sigma$

ดังนั้น  $f$  ไม่เป็นส่งเปิดแบบเอสเบต้าบน  $X$  □

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นารแสดงว่า มีฟังก์ชันที่เป็นทั้งการส่งเปิดแบบเอสเบต้าและ ต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

**ตัวอย่าง 4.2.2** ให้  $X = \{a, b, c\}$   $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, X\}$  เป็นทอพอโลยีบน  $X$  และ  $i$  เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บน  $X$  จงแสดงว่า  $i$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า และส่งเปิดแบบเอสเบต้าบน  $X$

**วิธีทำ** พิจารณาปริภูมิ  $X$  และให้  $H$  เป็นสับเซตของ  $X$

ตารางที่ 4.3: แสดงโคลเซอร์ของอินทีเรียของสับเซต  $H$  และคอมพลีเมนต์ของสับเซต  $H$

| $H$         | $int(H)$    | $cl(int(H))$ | $cl(H)$     | $int(cl(H))$ | $cl(int(cl(H)))$ | $X \setminus H$ |
|-------------|-------------|--------------|-------------|--------------|------------------|-----------------|
| $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$  | $\emptyset$ | $\emptyset$  | $\emptyset$      | $X$             |
| $X$         | $X$         | $X$          | $X$         | $X$          | $X$              | $\emptyset$     |
| $\{a\}$     | $\emptyset$ | $\emptyset$  | $X$         | $X$          | $X$              | $\{b, c\}$      |
| $\{b\}$     | $\emptyset$ | $\emptyset$  | $X$         | $X$          | $X$              | $\{a, c\}$      |
| $\{c\}$     | $\emptyset$ | $\emptyset$  | $\{c\}$     | $\emptyset$  | $\emptyset$      | $\{a, b\}$      |
| $\{a, b\}$  | $\{a, b\}$  | $X$          | $X$         | $X$          | $X$              | $\{c\}$         |
| $\{a, c\}$  | $\emptyset$ | $\emptyset$  | $X$         | $X$          | $X$              | $\{b\}$         |
| $\{b, c\}$  | $\emptyset$ | $\emptyset$  | $X$         | $X$          | $X$              | $\{a\}$         |

$$\text{ได้ว่า } SO(X) = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}$$

$$\beta O(X) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$\text{และ } \beta C(X) = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}\}$$

$$\text{ดังนั้น } S_\beta O(X) = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}$$

เนื่องจาก  $i$  เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ทำให้ได้ว่า

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in S_\beta O(X)$$

$$f^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\} \in S_\beta O(X)$$

$$\text{และ } f^{-1}(X) = X \in S_\beta O(X)$$

โดยทฤษฎีบท 2.1.3 จึงได้ว่า  $i$  ต่อเนื่องแบบเอสเบต้าบน  $X$  ในทำนองเดียวกัน

$$f(\emptyset) = \emptyset \in \tau$$

$$f(\{a, b\}) = \{a, b\} \in \tau$$

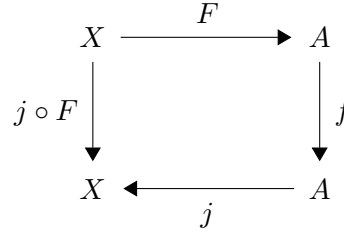
$$\text{และ } f(X) = X \in \tau$$

ดังนั้น  $i$  เป็นการส่งเปิดแบบเอสเบต้าบน  $X$

□

### 4.3 สมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

**ทฤษฎีบท 4.3.1** ให้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี และ  $A$  เป็นเซตเปิดหรือไม่ก็เป็นเซตหนาแน่นใน  $X$  ถ้า  $X$  มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ( $S_{\beta}cFPP$ ) และ  $A$  เป็นเซตรีแทรกความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าแล้ว  $A$  มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ( $S_{\beta}cFPP$ )



รูปที่ 4.1: แสดง  $A$  มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

**บทพิสูจน์** จะแสดงว่า  $A$  มี  $S_{\beta}cFPP$

ให้  $f : A \rightarrow A$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

เนื่องจาก  $A$  เป็นเซตรีแทรกความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าของ  $X$

ดังนั้นเราสามารถขยายเป็นฟังก์ชันความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า  $F : X \rightarrow A$

ให้  $j : A \rightarrow X$  เป็นฟังก์ชันอินclusion

ถ้า  $V$  เป็นเซตเปิดใน  $X$  แล้วจะได้ว่า  $f^{-1}(V) = A \cap V$  เป็นเซตเปิดในปริภูมิย่อย  $A$

ดังนั้น  $F^{-1}(j^{-1}(V)) = (j \circ F)^{-1}(V)$  เป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้าใน  $X$

ทำให้ได้ว่า  $j \circ F : X \rightarrow X$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

แต่เนื่องจาก  $X$  มี  $S_{\beta}cFPP$

ทำให้มี  $x \in A \subseteq X$  ที่  $x = (j \circ F)(x) = j(F(x)) = j(f(x)) = f(x)$

นั่นคือ  $A$  มี  $S_{\beta}cFPP$

□

**ทฤษฎีบท 4.3.2** ให้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเรกูลาร์และโลคัลลีอินดิสครีต (regular and locally indiscrete space) ซึ่งมีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ( $S_{\beta}cFPP$ ) ถ้า  $\sigma$  เป็นทอพอโลยีสำหรับ  $X$  ที่เข้มกว่า (stronger)  $\tau$  และ  $clG^{(\tau)} = clG^{(\sigma)}$  สำหรับทุกเซตเปิด  $G$  ใน  $(X, \sigma)$  แล้ว  $(X, \sigma)$  มีสมบัติจุดตรึง ( $FPP$ )

**บทพิสูจน์** ให้  $f : (X, \sigma) \rightarrow (Y, \sigma)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

$g : (X, \sigma) \rightarrow (Y, \tau)$

$h : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau)$  นิยามโดย  $h(x) = f(x) = g(x)$  สำหรับทุก  $x \in X$

$i : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์

จากกำหนด  $\tau \subset \sigma$  และ  $i$  เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์

ดังนั้นสำหรับแต่ละเซตเปิด  $O$  ใน  $(X, \tau)$  ได้ว่า  $i(O) = O$  เป็นเซตเปิดใน  $(X, \sigma)$

ทำให้ได้ว่า  $i$  เป็นฟังก์ชันเปิด หนึ่งต่อหนึ่ง และทั่วถึง

ต่อไปจะแสดงว่า  $g$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ให้  $G$  เป็นเซตเปิดใน  $(X, \tau)$

เพราะว่า  $i$  เป็นฟังก์ชันเปิดจึงได้ว่า  $i(G)$  เป็นเซตเปิดใน  $(X, \sigma)$

แต่เนื่องจาก  $f = i \circ g$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ทำให้  $(i \circ g)^{-1}(i(G)) = g^{-1}(i^{-1}(i(G))) = g^{-1}(G)$  เป็นเซตเปิดใน  $(X, \sigma)$

ดังนั้น  $g$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ต่อไปจะแสดงว่า  $h$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้าบน  $X$

ให้  $x \in X$  และ  $h(x) \in V$  สำหรับแต่ละเซตเปิด  $V$  ใน  $(X, \tau)$

ทำให้ได้ว่า  $V^c$  เป็นเซตปิดใน  $(X, \tau)$  และ  $h(x) \notin V^c$

แต่จากกำหนด  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเรกูลาร์

ดังนั้นมีเซตเปิด  $A$  และ  $B$  ใน  $(X, \tau)$  ที่  $A \cap B = \emptyset$ ,  $h(x) \in A$  และ  $V^c \subseteq B$

จาก  $A \cap B = \emptyset$  ทำให้  $A \subseteq B^c$

โดยสมบัติของโคลสเชอร์ได้ว่า  $clA^{(\tau)} \subseteq cl(B^c)^{(\tau)} = B^c$

เป็นผลทำให้  $B^c \subseteq (V^c)^c = V$  จึงได้ว่า  $clA^{(\tau)} \subseteq V$

ดังนั้น  $h(x) \in A \subseteq clA^{(\tau)} \subseteq V$

เนื่องจาก  $g$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จึงได้ว่า  $g^{-1}(A)$  เป็นเซตเปิดใน  $(X, \sigma)$

โดยการนิยามฟังก์ชัน  $h$  ทำให้  $h^{-1}(A) = f^{-1}(A) = g^{-1}(A)$ ,  $\forall x \in A$

ดังนั้น  $h^{-1}(A) = f^{-1}(A)$  เป็นเซตเปิดใน  $(X, \sigma)$

โดยสมบัติของโคลสเชอร์และจากกำหนด  $clG^{(\tau)} = clG^{(\sigma)}$

สำหรับทุกเซตเปิด  $G$  ใน  $(X, \sigma)$

ทำให้ได้ว่า  $x \in h^{-1}(A) \subseteq cl(h^{-1}(A))^{(\tau)} = cl(h^{-1}(A))^{(\sigma)} = cl(f^{-1}(A))^{(\sigma)} \dots (A)$

ด้วยเหตุผล  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจึงได้ว่า  $cl(f^{-1}(A))^{(\sigma)} \subseteq f^{-1}cl(A)^{(\sigma)} \dots (B)$

และเนื่องจาก  $\tau \subset \sigma$  ทำให้  $f^{-1}cl(A)^{(\sigma)} \subseteq f^{-1}cl(A)^{(\tau)} \dots (C)$

และจาก  $clA^{(\tau)} \subseteq V$  ทำให้ได้ว่า  $f^{-1}(clA^{(\tau)}) \subseteq f^{-1}(V) \dots (D)$

จาก (A),(B),(C) และ(D) ทำให้  $h^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(V)$  และจากการนิยาม  $h$

ทำให้  $h^{-1}(V) = f^{-1}(V)$  เป็นผลทำให้  $cl(h^{-1}(A))^{(\tau)} \subseteq h^{-1}(V)$

ให้  $U = h^{-1}(A)$  ซึ่งเป็นเซตเปิดใน  $(X, \tau)$

เนื่องจากกำหนดว่า  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิโลคัลลีอินตีสคริต

จึงทำให้  $U$  ซึ่งเป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้าที่  $x \in U$  และ  $h(clU^{(\tau)}) \subseteq V$

ทำให้ได้ว่า  $h(U) \subseteq h(clU^{(\tau)}) \subseteq V$

ดังนั้น  $h$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้าบน  $(X, \tau)$

แต่  $(X, \tau)$  มี  $S_{\beta}cFPP$  จึงมี  $x \in X$  ซึ่ง  $h(x) = x$

และเนื่องจาก  $f(x) = h(x)$ ,  $\forall x \in X$  เป็นผลให้  $f(x) = x$

ดังนั้น  $(X, \tau)$  มี  $FPP$

□

**บทตั้ง 4.3.1** ให้  $(X, \tau)$ ,  $(Y, \sigma)$  และ  $(Z, \nu)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี ถ้า  $g \circ f : (X, \tau) \rightarrow (Z, \nu)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้าบน  $X$  และ  $g : (Y, \sigma) \rightarrow (Z, \nu)$  เป็นฟังก์ชันเปิด หนึ่งต่อหนึ่ง และทั่วถึง แล้ว  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้าบน  $X$

**บทพิสูจน์** ให้  $U$  เป็นเซตเปิดใน  $(Y, \sigma)$

เนื่องจาก  $g : (Y, \sigma) \rightarrow (Z, \nu)$  เป็นฟังก์ชันเปิด

ทำให้ได้ว่า  $g(U)$  เป็นเซตเปิดใน  $(Z, \nu)$

เนื่องจาก  $g \circ f : (X, \tau) \rightarrow (Z, \nu)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้าบน  $X$

โดยทฤษฎีบท 2.1.9 ข้อ (7) ทำให้ได้

$$(g \circ f)^{-1}(g(U)) = (g \circ f)^{-1}(\text{int}(g(U))) \subseteq S_\beta \text{int}(g \circ f)^{-1}(g(U))$$

เนื่องจาก  $g$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และทั่วถึง

$$\text{ได้ว่า } (g \circ f)^{-1}(g(U)) = f^{-1}(g^{-1}(g(U))) = f^{-1}(U)$$

$$\text{เป็นผลทำให้ } f^{-1}(U) = f^{-1}(\text{int}U) \subseteq S_\beta \text{int}f^{-1}(U)$$

โดยทฤษฎีบท 2.1.9 ข้อ (7) ทำให้ได้ว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้าบน  $X$

□

ด้วยการใช้บทตั้ง 4.3.1 และการพิสูจน์จะทำในลักษณะทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.3.2 ทำให้เราได้บทแทรกต่อไปนี้

**บทแทรก 4.3.3** ให้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเรกูลาร์และโลคัลลีอินดิสครีต (regular and locally indiscrete space) ซึ่งมีสมบัติจุดตรึง (FPP) ถ้า  $\sigma$  เป็นทอพอโลยีสำหรับ  $X$  ที่เข้มกว่า (stronger)  $\tau$  และ  $clG^{(\tau)} = clG^{(\sigma)}$  สำหรับทุกเซตเปิด  $G$  ใน  $(X, \sigma)$  แล้ว  $(X, \sigma)$  มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ( $S_\beta cFPP$ )

**บทพิสูจน์** ให้  $f : (X, \sigma) \rightarrow (Y, \sigma)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

$$g : (X, \sigma) \rightarrow (Y, \tau)$$

$$h : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau) \text{ นิยามโดย } h(x) = f(x) = g(x) \text{ สำหรับทุก } x \in X$$

$$i : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma) \text{ เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์}$$

จะแสดงว่า  $g$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

เนื่องจาก  $\tau \subset \sigma$  และ  $i$  เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์

ดังนั้นสำหรับแต่ละเซตเปิด  $O$  ใน  $(X, \tau)$  ได้ว่า  $i(O) = O$  เป็นเซตเปิดใน  $(X, \sigma)$

ทำให้ได้ว่า  $i$  เป็นฟังก์ชันเปิด หนึ่งต่อหนึ่ง และทั่วถึง

แต่เพราะว่า  $f = i \circ g$  ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า

โดยบทตั้ง 4.3.1 ทำให้ได้ว่า  $g$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้าบน  $X$

ต่อไปจะแสดงว่า  $h$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

แสดงโดยการใช้เหตุผลเช่นเดียวทฤษฎีบท 4.3.2 ทำให้ได้ว่า  $h(x) \in A \subseteq clA^{(\tau)}$

สำหรับทุกเซตเปิด  $A$  ใน  $(X, \tau)$  ที่บรรจุ  $h(x)$  และ  $A \in \tau$

จากกำหนด  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิโลคัลลีอินดิสครีต ทำให้ได้ว่า  $A \in S_\beta O(X)$

เพราะว่า  $g$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า จึงได้ว่า  $g^{-1}(A)$  เป็นเซตเปิดใน  $(X, \sigma)$

เนื่องจาก  $h^{-1}(A) = f^{-1}(A) = g^{-1}(A)$  ซึ่งเป็นเซตเปิดใน  $(X, \sigma)$

และจากกำหนด  $clG^{(\tau)} = clG^{(\sigma)}$  สำหรับทุกเซตเปิด  $G$  ใน  $(X, \sigma)$

$$\text{ทำให้ได้ว่า } x \in h^{-1}(A) \subseteq cl(h^{-1}(A))^{(\tau)} = cl(h^{-1}(A))^{(\sigma)} = cl(f^{-1}(A))^{(\sigma)} \dots (*)$$

ใช้เหตุผล  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้าและ  $\tau \subset \sigma$

$$\text{ได้ว่า } cl(f^{-1}(A))^{(\sigma)} \subseteq f^{-1}cl(A)^{(\sigma)} \text{ และ } f^{-1}cl(A)^{(\sigma)} \subseteq f^{-1}cl(A)^{(\tau)} \dots (**)$$

$$\text{และจาก } clA^{(\tau)} \subseteq V \text{ ทำให้ได้ว่า } f^{-1}(clA)^{(\tau)} \subseteq f^{-1}(V) \dots (***)$$

จาก(\*),(\*\*)และ(\*\*\*) ทำให้  $h^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(V)$  และจากการนิยาม  $h$

$$\text{ทำให้ } h^{-1}(V) = f^{-1}(V) \text{ เป็นผลทำให้ } cl(h^{-1}(A))^{(\tau)} \subseteq h^{-1}(V)$$



ทำให้  $h^{-1}(V) = f^{-1}(V)$  เป็นผลทำให้  $cl(h^{-1}(A))^{(\tau)} \subseteq h^{-1}(V)$   
 ให้  $U = h^{-1}(A)$  ซึ่งเป็นเซตเปิดใน  $(X, \tau)$   
 เนื่องจากกำหนดว่า  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิโทลล์ลีอินดิสครีต  
 จึงทำให้  $U$  ซึ่งเป็นเซตเปิดแบบเอสเบต้าที่  $x \in U$  และ  $h(clU^{(\tau)}) \subseteq V$   
 ทำให้ได้ว่า  $h(U) \subseteq h(clU^{(\tau)}) \subseteq V$   
 ดังนั้น  $h$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน  $(X, \tau)$   
 แต่  $(X, \tau)$  มี  $FPP$  จึงมี  $x \in X$  ซึ่ง  $x = h(x)$   
 และเนื่องจาก  $f(x) = h(x)$ ,  $\forall x \in X$  เป็นผลให้  $f(x) = x$   
 ดังนั้น  $(X, \tau)$  มี  $S_{\beta}cFPP$

□

## บทที่ 5

### สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

เราได้ศึกษาความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าและนำเสนอคุณลักษณะของสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ซึ่งในบทนี้จะกล่าวถึงหัวข้อ วัตถุประสงค์ของการวิจัย สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ ตามลำดับดังนี้

#### 5.1 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

โครงการวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ 2 ข้อคือ

- (1) กำหนดนิยามของสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบ เอสเบต้า
- (2) ศึกษาคุณลักษณะของสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าและพิสูจน์ทฤษฎีบทที่นำเสนอ

#### 5.2 สรุปผล

การวิจัยคุณลักษณะของสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ได้ข้อสรุปดังนี้

- (1) การกำหนดนิยามของสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าซึ่งให้นิยามว่า ให้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี จะกล่าวว่า ปริภูมิ  $X$  มี สมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ( $S_\beta$ -continuous fixed point property) ถ้าแต่ละฟังก์ชัน  $f : X \rightarrow X$  ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า จะมี  $x \in X$  ซึ่ง  $f(x) = x$   
 $X$  มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า เขียนแทนด้วย  $X$  มี  $S_\beta cFPP$
- (2) การศึกษาคุณลักษณะของสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า พบว่า  
ให้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเรกูลาร์และโลคัลลีอินดิสครีต (regular and locally indiscrete space) ซึ่งมีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ( $S_\beta cFPP$ ) ถ้า  $\sigma$  เป็นทอพอโลยีสำหรับ  $X$  ที่เข้มกว่า (stronger)  $\tau$  และ  $clG^{(\tau)} = clG^{(\sigma)}$  สำหรับทุกเซตเปิด  $G$  ใน  $(X, \sigma)$  แล้ว  $(X, \sigma)$  มีสมบัติจุดตรึง ( $FPP$ )

#### 5.3 อภิปรายผล

(1) การนิยามการมีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าที่กล่าวว่า ปริภูมิเชิงทอพอโลยี  $X$  มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ( $S_\beta$ -continuous fixed point property) ถ้าแต่ละฟังก์ชัน  $f : X \rightarrow X$  ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอสเบต้า จะมี  $x \in X$  ซึ่ง  $f(x) = x$  เนื่องด้วยผู้วิจัยได้ศึกษาแนวคิด จากการนิยามการมีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ( $\delta$ -continuous fixed point property) ของ F. Cammaroto and T. Noiri และจากการนิยามการมีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบสตรองลีรีต้าเซมิ (strongly- $\theta$ -semi-continuous fixed point property) ของ N. Puturong ตามลำดับจึงนิยามสอดคล้องกับสองแนวคิดดังกล่าว

(2) คุณลักษณะของสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ซึ่งพบว่า

(2.1) สำหรับปริภูมิเรกูลาร์และโลคัลลีอินดิสครีต  $(X, \tau)$  ซึ่งมีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบ

เอสเบต้า ( $S_{\beta}cFPP$ ) ถ้า  $\sigma$  เป็นทอพอโลยีสำหรับ  $X$  ที่เข้มกว่า (stronger)  $\tau$  และ  $clG^{(\tau)} = clG^{(\sigma)}$  สำหรับทุกเซตเปิด  $G$  ใน  $(X, \sigma)$  แล้ว  $(X, \sigma)$  มีสมบัติจุดตรึง ( $FPP$ )

(2.2) ให้  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี และ  $A$  ซึ่งเป็นเซตเปิดหรือไม่ก็เป็นเซตหนาแน่นใน  $X$  ถ้า  $X$  มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ( $S_{\beta}cFPP$ ) และ  $A$  เป็นเซตรีแทรกความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าแล้ว  $A$  มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า ( $S_{\beta}cFPP$ )

เนื่องด้วยผู้วิจัยได้ศึกษาบทความเรื่อง สมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเดลต้า ( $\delta$ -continuous fixed point property) ของ F. Cammaroto and T. Noiri จึงใช้แนวทางดังกล่าว โดยแทน  $(X, \tau)$  ซึ่งเป็นปริภูมิโอลมสเรกูลาร์ด้วย  $(X, \tau)$  เป็นปริภูมิเรกูลาร์และโลคัลลีนดิสคริต แทน  $X$  มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเดลต้า ด้วยข้อความ  $X$  มีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าในบทแทรก 4.3.3

#### 5.4 ข้อเสนอแนะ

เนื่องด้วยสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้า เป็นจุดตรึงแบบใหม่ จึงมีหัวข้อหรือปัญหาปลายเปิดสำหรับผู้สนใจสามารถศึกษาต่อในประเด็นต่อไปนี้

- (1) ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างการมีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้ากับการมีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบอื่นๆ
- (2) หาเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการมีสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบเอสเบต้าของปริภูมิอื่นนอกเหนือจากปริภูมิเรกูลาร์และปริภูมิโลคัลลีนดิสคริต
- (3) นิยามและศึกษาคูณลักษณะของสมบัติจุดตรึงความต่อเนื่องแบบใหม่ที่ต่างจากผู้วิจัยทางด้านคณิตศาสตร์เคยนำเสนอไว้

## บรรณานุกรม

- นวลอนงค์ อธิจิระจรัส. (2522). *โทโพโลยีเบื้องต้น*. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- สมคึก สกุลวัฒน์. (ม.ป.ท.). *โทโพโลยีเบื้องต้น*. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- สมพงษ์ ธรรมพงษา. (2532). *โทโพโลยี*. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- Dugundji, J. (1966). *Topology*. Boston: Allyn and Bacon.
- Steen, L. A. and Seebach, J. A. (1978). *Counterexamples in Topology*. New York: Springer-Verlay.
- Baker, C. W. (1986). *Characterizations of some near-continuous functions and near-open functions*. Inter. J. Math. and Math. Sci., vol. 9, no. 4, pp. 715-720.
- Baker, C. W. (1994). *Decomposition of openness*. Inter. J. Math. and Math. Sci., vol. 17, no. 2, pp. 413-415.
- Biswas, N. (1969). *On semiopen mappings in topological spaces*. Bull. Cal. Math. Soc., vol. 61, pp. 127-135.
- Camaroto, F. and Noiri, T. (1990). *On the  $\delta$ -continuous fixed point property*. Inter. J. Math. and Math. Sci., vol. 13, no. 1, pp. 45-50.
- Dontchev, J. (1998). *Survey on pre open sets*. The proceedings of Yatsushiro topological conference., pp. 1-18.
- E-Moonsef, Abd., El-Deeb, S. N. and Mahmoud, R. A. (1983).  *$\beta$ -open sets and  $\beta$ -continuous mappings*. Bull. Fac. Sci. Assiut. Univ., vol. 12, pp. 70-90.
- Khalaf, A. B. and Ahmed, N. K. (2013).  *$S_\beta$ -open sets and  $S_\beta$ -continuity in topological spaces*. Thai Journal of Mathematics., vol. 11, no. 12, pp. 319-335.
- Levine, N. (1963). *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces*. Amer. Math. Monthly., vol. 70, pp. 36-41.
- Mashhour, A. S., Abd. El-monsef, M. E. and El-Deeb, S. N. (1982). *On pre-continuous and weak pre-continuous mappings*. Proc. Math. Phys. Soc. Egypt., vol. 53, pp. 47-53.
- Mashhour, A. S., Hasuneie, I. A. and El-Deeb, S. N. (1983). *On  $\alpha$ -continuous and  $\alpha$ -open mappings*. Acta Maht. Hungar., vol. 41, pp. 213-218.
- Puturong, N. (2007). *On strongly  $\theta$ -semi-continuous functions*. Thai Journal of Mathematics Special Issue (Annuan meeting in mathematics), pp. 11-23.
- Rose, D. A. (1984). *Weak openness and almost openness*. Inter. J. Math. and Math. Sci., vol. 17, no. 2, pp. 35-40.
- Sakai, S. (1989). *Unified Characterizations of some mappings near to continuous or near to open*. Kyungpook Math. J., vol. 29, pp. 41-56.
- Thivagar, M. L. (1991). *Generalization of pairwise  $\alpha$ -continuous functions*. Pure and Applied Mathe. Sci., Vol. 33, No.1-2, pp. 55-63.

ภาคผนวก

## ก. ประวัติผู้วิจัย

- |   |                            |                                                                                                                        |
|---|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | ผู้วิจัย                   | อาตุลย์ จงรักษ์                                                                                                        |
| 2 | หมายเลขบัตรประจำตัวประชาชน | 3 6405 00624 40 1                                                                                                      |
| 3 | ตำแหน่งปัจจุบัน            | ประธานหลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์                                                                                       |
| 4 | ตำแหน่งทางวิชาการ          | ผู้ช่วยศาสตราจารย์                                                                                                     |
| 5 | หน่วยงาน                   | สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี<br>มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์<br>E-mail : mathematics_science@pcru.ac.th |
| 6 | ประวัติการศึกษา            | วท.บ.(คณิตศาสตร์)<br>มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒพิชญ์โลก<br>วท.ม.(การสอนคณิตศาสตร์)<br>มหาวิทยาลัยเชียงใหม่             |

## ข. รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ

1. รองศาสตราจารย์ ดร. ชัยณรงค์ ชันผณี  
ตำแหน่ง อาจารย์ประจำหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์  
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์
2. รองศาสตราจารย์ ดร. เกียรติศักดิ์ รัตนสีหา  
ตำแหน่ง อาจารย์ประจำหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์  
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย
3. รองศาสตราจารย์สมเกียรติ พรชัยเจริญศรี  
ตำแหน่ง อาจารย์ประจำหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์  
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏลำปาง

## ค. การเผยแพร่ผลงานวิจัย